This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

NON
CIRCULATING

QA
3
.A367
1761

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES.

TOME VI.

On trouve chez BRIASSON *les Ouvrages de Mathématique de M. d'*ALEMBERT ;

SAVOIR,

TRAITÉ de Dynamique, nouvelle Edition, considérablement augmentée, *in*-4. *fig.* 1758. La premiere Edition est de 1743.

— Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides, pour servir de suite au *Traité de Dynamique*, *in*-4. *fig.* seconde Edition, revue & augmentée, 1770. La premiere Edition est de 1744.

— Essai d'une nouvelle Théorie de la résistance des Fluides, *in*-4. *fig.* 1752.

Nota. *Ces trois Traités ont une très-grande liaison entr'eux ; cependant ils seront toujours séparés au gré de l'acheteur.*

— Réflexions sur la cause générale des Vents, *in*-4. *fig.* 1747.

— Recherches sur la précession des Equinoxes & sur la nutation de l'Axe de la Terre, *in*-4. *fig.* 1749.

— Recherches sur différens points importans du Système du Monde, *in*-4. 3 vol. *fig.* 1754 & 1756.

— Opuscules Mathématiques, ou Mémoires sur différens sujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Astronomie, &c. *in*-4. 6 vol. *fig.* 1761, 1764, 1767, 1768 & 1773. *Le quatriéme, le cinquiéme & le sixiéme volume se vendent séparément.*

Nota. Les *Elémens de Musique* du même Auteur, qu'on peut mettre au nombre de ses Ouvrages Mathématiques, se trouvent à Paris, chez *Desaint* & *Saillant*, & à Lyon, chez *Jean-Marie Bruyset.*

OPUSCULES

MATHÉMATIQUES,

92178

OU

MÉMOIRES sur différens Sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, d'OPTIQUE, d'ASTRONOMIE, &c.

Par M. D'ALEMBERT, *Secrétaire perpétuel de l'Académie Françoiſe, des Académies Royales des Sciences de France, de Pruſſe, d'Angleterre & de Ruſſie, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suede, de l'Inſtitut de Bologne, & des Sociétés Royales des Sciences de Turin & de Norwege.*

TOME VI.

A PARIS,

Chez BRIASSON, Libraire, rue Saint Jacques, à la Science.

M. DCC. LXXIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

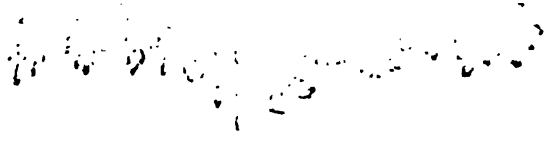

TABLE
DES TITRES

Contenus dans ce ſixiéme Volume.

QUARANTE-CINQUIÉME MÉMOIRE.

Recherches ſur quelques points d'Aſtronomie Phyſique, page 1

ARTICLE I.

Nouvelles Recherches ſur la Théorie de la Lune, 2
§. I. *De la maniere la plus ſimple de calculer analytiquement & aſtronomiquement les mouvemens de la Lune*, ibid.
§. II. *Sur les Equations incertaines de la Théorie de la Lune*, 11
§. III. *Sur l'Equation ſéculaire de la Lune*, 16

REMARQUES SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Remarque pour l'article 9 du §. 1, 22

Remarque ſur l'article 12 *du §.* 1, page 24
Remarque ſur l'article 15 *du §.* 1, 26
Remarque pour les articles 17 *&* 18 *du §.* 1, 35
Remarque ſur l'article 21 *du §.* 1, 36
Remarque pour l'article 9 *du §.* 2, ibid.
Remarque ſur l'article 7 *du §.* 3, 38
Remarque ſur l'article 9 *du §.* 3, 39

ARTICLE II.

Sur la Figure de la Terre, 47

ARTICLE III.

Eclairciſſemens ſur deux endroits de mes Ouvrages, qui ont rapport à la Figure de la Terre, 68

REMARQUES SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

Article 1, 77
Article 4, ibid.
Article 6, ibid.
Article 6, 79
Article 12, ibid.
Article 14, ibid.
Article 15, 82
Article 18, ibid.
P. S. Du 15 *Octobre* 1771. 83

ARTICLE IV.

Sur l'effet de la peſanteur au ſommet & au pied des Montagnes, 85

ADDITION à l'article précédent, faite en Janvier 1772, page 93

QUARANTE-SIXIÉME MÉMOIRE.

Suite des Recherches sur la Figure de la Terre, 99

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Article 3, 134
Article 8, 142
Article 10, 146
Article 11, ibid.
Article 16, 147
Article 23, 148
Article 37, 151
Article 39, 152
Article 45, ibid.
Article 47, 153
Article 55, 156
Article 63, 157

QUARANTE-SEPTIÉME MÉMOIRE.

Suite des Recherches sur la Figure de la Terre, 161

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Article 88, 198

Article 98, page 202
Article 110, 203
Article 111, ibid.
Article 114, 204
Article 115, 205
Article 119, 208
Article 135, ibid.

QUARANTE-HUITIÉME MÉMOIRE.

Suite des Recherches sur la Figure de la Terre, 211

REMARQUES SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

Article 4, 247
Article 5, 248
Article 7, ibid.
Article 10, 249
Article 11, 250
Article 12, ibid.
Article 13, 251
Article 30, 254

QUARANTE-NEUVIÉME MÉMOIRE.

Eclairciſſemens ſur une prétendue loi de la Réfraction de la Lumiere, 260

SUPPLE'MENT aux Recherches précédentes, 283

CINQUANTIÉME MÉMOIRE.

Sur quelques points d'Aſtronomie Phyſique.

§. I. *Sur l'Orbite des Cometes*, page 304
§. II. *Des Perturbations d'une Planete principale par ſes ſatellites, & de l'orbite même de ces ſatellites*, 311
§. III. *Sur les Equations ſéculaires des Planetes*, 324
§. IV. *Sur la Préceſſion des Equinoxes*, 335
§. V. *Sur les Atmoſpheres des Corps céleſtes*, 339

CINQUANTE-UNIÉME MÉMOIRE.

Recherches ſur différens Sujets.

§. I. *Nouvelle démonſtration du Parallélogramme des Forces*, 360
Remarque Premiere, 364
Remarque Seconde, 365
Remarque Troiſiéme, 366
Remarque Quatriéme, 367
Remarque Cinquiéme, 368
§. II. *Sur l'Equilibre du Levier*, 370
§. III. *Réflexions ſur quelques loix de Méchanique*, 373
§. IV. *Méthode nouvelle, rigoureuſe & directe pour déterminer le mouvement des Fluides dans des Vaſes*, 379
§. V. *Solution d'un Problême de calcul intégral*, 390
§. VI. *Solution de quelques Problêmes ſur les fonctions Algébriques*, 393
§. VII. *Sur la Loi de l'Attraction*, 404

APPENDICE contenant quelques Additions aux Mémoires précédens, page 408
Addition pour la page 17, 409
Addition pour la page 20, *art.* 8, 412
Addition pour la page 28, 413
Addition pour la page 45, 414
Autre Addition pour la page 45, 417
Addition pour la page 49, *art.* 10, 418
Addition pour les pages 69 *&* 70, *art.* 4 *&* 6, ibid.
Addition pour la page 91, *art.* 17, 419
Addition pour la page 128, *à la fin de l'art.* 57 *du XLVI. Mémoire*, ibid.
Addition pour la Note (*a*) *du XLVI. Mémoire*, *page* 141, 420
Addition pour la page 143, 423
Addition pour la page 187, 424
Addition pour le L. Mémoire, §. I, *art.* 9, *page* 309, 425
Autre Addition pour le L. Mémoire, §. I, *art.* 9, *page* 309, 427
Autre Addition pour le L. Mémoire, §. I, *pag.* 309 *&* 310, *à la fin des art.* 9 *&* 10, 429
Addition pour la page 311, *à la fin de l'art.* 11 *du* §. I *du L. Mémoire*, 430
Addition pour le L. Mémoire, §. II, *à la fin*, *page* 324, 431
Addition pour le L. Mémoire, §. III, *art.* 9, *page* 328, *&* *art.* 11, *page* 329, 433
Addition pour le L. Mémoire, §. III, *art.* 12, *page* 329 *&* 330, 435
Addition pour le L. Mémoire, §. IV, *art.* 6, *page* 338, 436

Addition pour le LI. Mémoire, §. I, art. 16, page 370, page 438
Addition pour le LI. Mémoire, §. III, art. 6, page 377, 439
Addition pour le LI. Mémoire, §. IV, art. 23, page 390, 440
Addition pour le LI. Mémoire, §. VI, art. 5, page 396, 441
Addition pour le LI. Mémoire, §. VI, art. 14, page 399, 442

Fin de la Table.

EXTRAIT des Regîtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 2 Septembre 1772.

MESSIEURS LE MONNIER & l'Abbé BOSSUT, qui avoient été nommés pour examiner le Sixiéme Volume des *Opuſcules Mathématiques* de M. d'ALEMBERT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le 2 Septembre 1772.

GRANDJEAN DE FOUCHY,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

OPUSCULES
MATHÉMATIQUES.

XLV. MÉMOIRE.

Recherches ſur quelques points d'Aſtronomie Phyſique.

J'AI renfermé dans un ſeul Mémoire les différens objets de ces Recherches ; ſavoir, quelques réflexions ſur la Théorie de la Lune, ſur la Figure de la Terre, & ſur l'effet de la peſanteur au ſommet & au pied des Montagnes (*a*).

(*a*) Ce Mémoire, donné à l'Académie en 1770, ainſi que preſque toutes les Remarques qui y ſont jointes, étoit deſtiné à paroître dans le Volume de cette année-là ; mais comme il devoit être ſuivi de pluſieurs autres Mémoires ſur les mêmes objets, qui auroient occupé trop de place dans les Volumes ſuivans, l'Auteur a cru plus à propos de réunir toutes ces différentes Recherches dans ce ſixiéme Tome de ſes *Opuſcules Mathématiques*.

ARTICLE I.

Nouvelles Recherches ſur la Théorie de la Lune.

Ces Recherches ſerviront de ſuite, & en partie de Supplément à celles que j'ai données dans le cinquiéme Volume de mes Opuſcules. Je ſouhaite que les Géometres y trouvent quelques vues nouvelles pour perfectionner & ſimplifier la Théorie de la Lune.

§. I.

De la maniere la plus ſimple de calculer analytiquement & aſtronomiquement les mouvemens de la Lune.

1. Soit x le rayon vecteur de la Lune, projetté ſur l'écliptique, z l'angle vrai parcouru par la Lune durant le temps t, Ψ la force qui agit dans le ſens du rayon vecteur, & π la force perpendiculaire à ce rayon; on aura d'abord les deux équations

$$(A) \quad -ddx + xdz^2 - \Psi dt^2 = 0$$
$$(B) \quad xddz + 2dxdz = \pi dt^2;$$

ces deux équations ſont aiſées à déduire de celles que nous avons données, page 305 du cinquiéme Volume de nos Opuſcules; elles peuvent d'ailleurs ſe trouver directement d'une maniere très-facile, comme ont fait pluſieurs Géometres, en conſidérant que ſi Ψ étoit $= 0$ on auroit $ddx = xdz^2$, dt étant conſtant, & que ſi π

étoit = 0, on auroit $d(x\,x\,dz) = 0$, dt étant toujours ſuppoſé conſtant; d'où il eſt très-aiſé de déduire les équations précédentes (A) & (B), en ayant égard aux forces Ψ & π.

2. Pour intégrer ces équations de la maniere la plus appropriée aux calculs aſtronomiques, il faut, comme nous l'avons dit dans le Volume cité, que x & z ſoient exprimés par le mouvement moyen, que j'appelle Z.

3. Mais avant d'en venir là, il faut remarquer 1°. que dt doit être exprimé en dZ. 2°. Que les forces Ψ & π contiennent des ſinus & coſinus de l'angle $z - z'$, qui eſt l'élongation réelle de la Lune à l'oppoſition du Soleil. 3°. Que $z' = nZ - 2\lambda$ ſin. $\pi' nZ$ à très-peu près, n étant le rapport du mouvement moyen de la Terre à celui de la Lune, λ l'excentricité de l'orbite terreſtre, & $\pi' nZ$ l'anomalie moyenne de la Terre, ou ce qui revient au même, de l'oppoſition du Soleil. 4°. Enfin, que $z = Z + \alpha$, α étant une quantité ou angle qui n'eſt jamais fort grand, puiſqu'il ne paſſe pas 8 à 9 degrés, d'où il s'enſuit que $z - z' = Z - nZ + \alpha + 2\lambda$ ſin. $\pi' nZ$; & que par conſéquent, ſuivant la méthode que j'ai donnée ailleurs (*Rech. ſur le Syſt. du Monde*, premiere Partie, p. 50) ſin. $(z - z') =$ ſin. $(Z - nZ) +$ $(\alpha + 2\lambda$ ſin. $\pi' nZ)$ coſ. $(Z - nZ) - \frac{1}{2}(\alpha + 2\lambda$ ſin. $\pi' nZ)^2$ ſin. $(Z - nZ) - \frac{1}{2.3}(\alpha + 2\lambda$ ſin. $\pi' nZ)^3$ coſin. $(Z - nZ)$ &c. On trouvera de même coſin. $(z - z') =$ coſ. $(Z - nZ) - (\alpha + 2\lambda$ ſin. $\pi' nZ)$ ſin.

$(Z - nZ) - \frac{1}{2}(\alpha + 2\lambda \text{ sin. } \pi' nZ)^2 \text{ cosin.}$
$(Z - nZ) + \frac{1}{2.3}(\alpha + 2\lambda \text{ sin. } \pi' nZ) \text{ sin. } (Z - nZ)$
&c. Par ce moyen on aura l'expreſſion facile des quantités où entre l'angle $\zeta - \zeta'$, ſans employer dans cette expreſſion d'autres mouvemens que les mouvemens moyens.

4. A l'égard du temps dt, pour l'exprimer en dZ, on conſidérera que $dt^2 = \frac{a^3 dZ^2}{T+L}$, T étant la maſſe de la Terre, L celle de la Lune, & a le rayon d'une orbite circulaire que la Lune pourroit décrire uniformément en n'ayant d'autre force que celle de ſa gravitation vers la Terre. En ſubſtituant cette valeur de dt^2 dans les équations (A) & (B), on fera diſparoître dt^2.

5. De plus, ſi on nomme B la diſtance moyenne du Soleil à la Terre, on aura auſſi $dt^2 = \frac{B^3 n^2 dZ^2}{S}$, par la théorie des trajectoires elliptiques ; d'où il s'enſuit que $\frac{Sa^3}{(T+L)B^3} = n^2$; ou $\frac{S}{B^3} = \frac{n^2(T+L)}{a^3}$ (a).

6. Et comme les quantités Ψ & π contiennent les maſſes S & $T+L$, il ſera aiſé, au moyen des deux articles précédens, de faire diſparoître des équations dt,

(a) Il faudroit mettre à la rigueur $S+T$ au lieu de S dans cette équation & dans les précédentes, par la même raiſon qu'on a $T+L$ au lieu de T dans l'équation $dt^2 = \frac{a^3 dZ^2}{T+L}$. Mais T étant fort petit par rapport à S, on peut ici ſans erreur ſenſible ſubſtituer S à $S+T$.

S, & L tout-à-la-fois, & de la maniere la plus ſimple.

7. Soit maintenant ρ la tangente de la latitude, on conſidérera que la force Ψ eſt compoſée de trois autres, 1°. d'une force $\frac{(T+L)}{xx(1+\rho\rho)^{\frac{1}{2}}}$. 2°. D'une force φ' dérivée de l'action du Soleil, & qui agit ſuivant le rayon de l'orbite prbjettée de la Lune. 3°. D'une force φ cof. $(z-z')$ qui agit auſſi ſuivant le même rayon, & qui eſt dérivée de la force φ parallèle à l'écliptique, & provenant auſſi de l'action du Soleil. 4°. Enfin, on verra que la force $\pi = \varphi$ ſin. $(z-z')$, d'où il s'enſuit qu'on aura

$$(C)\ldots -d\,dx + x\,dz^2 - \frac{a^3\,dZ^2}{T+L} \times \left[\frac{T+L}{x^2(1+\rho\rho)^{\frac{1}{2}}} + \varphi' + \varphi \text{ cof. } (z-z')\right] = 0;$$

$$(D)\quad x\,ddz + 2\,dx\,dz = \frac{a^3\,dZ^2}{T+L} \times \varphi \text{ ſin. } (z-z').$$

8. Pour trouver l'équation de la latitude, on conſidérera que $x\rho$ eſt la diſtance de la Lune au plan de l'écliptique, & qu'on aura $-d^2(x\rho) = dt^2 \times \rho \times \left[\frac{T+L}{x^2(1+\rho\rho)^{\frac{1}{2}}} + \varphi'\right)$; ce qui donne en combinant cette équation avec l'équation (C)

$$(E)\quad -x\,dd\rho - 2\,dx\,d\rho - \rho\,x\,dz^2 + \frac{a^3\rho\,dZ^2}{T+L} \times \varphi \text{ cof. } (z-z') = 0;$$

équation qui revient à celle que nous avons trouvée par une autre méthode dans le cinquiéme Volume de nos Opuſcules, pag. 374.

9. Cette derniere équation ſuffit pour connoître la

latitude de la Lune, ſans avoir calculé auparavant le mouvement du nœud & l'inclinaiſon; & c'eſt, comme nous l'avons déja dit ailleurs, M. de la Grange qui a fait le premier cette remarque. Cependant, comme il pourroit être utile de connoître ſéparément le mouvement des nœuds de la Lune, on conſidérera que ſi ζ eſt ce mouvement, on aura

(F) $x\,d\zeta\,dz = \varphi\,dt^2$ ſin. $(z' - \zeta) \times$ ſin. $(z - \zeta)$;

équation très-aiſée à déduire de celle qu'on trouve dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, premiere Partie, page 20, & très-facile d'ailleurs à trouver directement par la méthode employée dans l'endroit cité (*a*).

10. Pour intégrer maintenant ces différentes équations, on fera $x = a\,(1 + b$ cof. $NZ + c$ cof. $2\,NZ$, &c. $+ e$ cof. $(2Z - 2nZ) + f$ cof. $(2Z - 2nZ - NZ) +$ &c.) & ainſi de ſuite; les coefficiens $b, c, e,$ &c. étant indéterminés ainſi que N. On fera auſſi z ou $Z + \alpha = Z + \zeta$ ſin. $NZ + \gamma$ ſin. $2nZ$, &c. $+ \varepsilon$ ſin. $(2Z - 2nZ)$ &c. On fera enfin $\rho = \mu\,($ ſin. $K.z + \lambda$ ſin. $(2nZ - 2K.Z) +$ &c.) $K, \lambda,$ &c. étant auſſi indéterminées. On ſubſtituera ces valeurs dans les équations (A), (B), (E), & on déterminera par les méthodes ordinaires les coefficiens inconnus.

11. Il eſt à remarquer que les quantités a & μ s'en iront dans les calculs, ou du moins dans pluſieurs termes, & que ces quantités devront être déterminées par les obſervations. La quantité b, coefficient de cof. $N.Z$

(*a*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

dans la valeur de x, reſtera auſſi indéterminée, & devra être fixée par les obſervations; nous dirons plus bas comment on doit s'y prendre pour cet effet.

12. Quant à la quantité a^3, on en trouvera la valeur en faiſant égal à zéro dans l'équation (*A*) le coefficient du terme conſtant, c'eſt-à-dire, qui ne renfermera point l'angle Z ni ſes multiples. Pour le faire ſentir, ſoit ſuppoſé ſimplement dans l'équation (*A*), $\varphi = \frac{T+L}{x^2}$, c'eſt-à-dire, que la trajectoire de la Lune ſoit une ellipſe ſimple ordinaire, on aura $-dd\frac{1}{x} + \frac{dz^2}{x} - \frac{a^3 dZ^2}{x^2} = 0$. Donc ſi on fait $x = a(1+\theta)$, θ ne renfermant que des ſinus & des coſinus, ou plutôt $x = a(1 + b \text{ cof. } Z + c \text{ cof. } 2Z$, &c.) on aura évidemment un terme qui ne contiendra ni cof. Z, ni cof. $2Z$, &c. & qui donnera la valeur de a^3 en a, b, &c. il en ſera de même dans l'équation (*A*) de l'art. 1 (*b*).

13. Cette méthode de déterminer les coefficiens dans l'équation de l'orbite lunaire, & dans l'expreſſion du lieu vrai, eſt à la vérité moins directe que d'autres qui ont été données par différens Mathématiciens; mais elle a l'avantage d'être plus ſimple, & de donner plus exactement les valeurs de ces coefficiens; plus ſimple, parce qu'on s'y paſſe d'intégration, & plus exacte, parce qu'on trouve directement la valeur des coefficiens, ſans ſubſtituer à chaque approximation la valeur trouvée dans l'ap-

(*b*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

proximation précédente. C'eſt ce qui s'éclaircira encore mieux par la ſuite.

14. L'inconvénient de cette méthode, comme nous l'avons déja remarqué ailleurs, c'eſt que la valeur de N qui donne le mouvement de l'apogée, & qui doit être $= 1$ quand les forces perturbatrices φ', φ ſont nulles, ſe trouve dans ce dernier cas exprimée par une ſérie infinie, qui à la vérité approchera continuellement & de plus en plus de l'unité, mais qui n'y ſera jamais exactement égale.

15. Mais comme on eſt certain *à poſteriori* que la valeur de N eſt $= 1$, lorſque les forces perturbatrices ſont nulles, & que ces forces perturbatrices ſont indiquées par le coefficient n^2 qui entre dans le rapport de S à $T + L$, il eſt clair que pour ſimplifier les calculs dans la recherche du mouvement de l'apogée, il n'y aura qu'à regarder comme nuls dans la valeur de N tous les termes dans leſquels n^2 ne ſe trouvera pas; ou en général négliger dans le calcul comme inutiles, tous les termes où il ne ſe trouvera aucune quantité dépendante des forces perturbatrices, en quelque nombre & de quelqu'eſpéce qu'elles ſoient. Par-là on trouvera l'influence que les forces perturbatrices ont ſur le mouvement de l'apogée, avec autant de facilité à peu près que ſi on cherchoit la valeur de x par le mouvement vrai z (*c*).

16. On intégrera de la même maniere par la méthode

(*c*) Voyez les Remarques à la fin de cet article,

des

des indéterminées, l'équation (*F*) de l'art. 9, qui représente le mouvement du nœud, si on croit avoir besoin de ce mouvement; & pour cela on fera $\zeta = K.Z + \nu$, ce qui donnera $\zeta' - \zeta = nZ + 2\lambda$ sin. $\pi nZ - K.Z - \nu$, & $\zeta - \zeta = Z + \alpha - K.Z - \nu$; d'où il est aisé (*art.* 3) d'exprimer les sinus & cosinus en multiples de Z, ce qui donnera directement en mouvement moyen, le mouvement vrai du nœud & ses équations.

17. Pour déterminer maintenant les quantités a, b, μ, qui restent indéterminées (*art.* 11) dans le calcul de l'orbite, on n'aura besoin à la rigueur que d'une seule observation, pourvû que les mouvemens moyens soient exactement connus.

18. Soit d'abord ζ le mouvement vrai observé pour un instant donné, pour lequel (*hyp.*) on connoît Z; on aura $\zeta = Z + \alpha$, α étant une quantité dans laquelle il n'y a que b d'inconnue, d'où l'on tirera par conséquent b (*d*).

19. Soit ensuite σ la parallaxe observée pour ce même instant ou pour quelqu'autre, & $\mathfrak{S}$ la parallaxe moyenne, celle qui répond à la distance moyenne a. Soit ρ' la tangente de la latitude calculée pour le même instant, on aura $\sigma\sqrt{(1 + \rho'\rho')}$ pour la parallaxe qui répond à la distance x; soit ensuite $x = a(1 + \theta)$, il est aisé de voir que les parallaxes étant en raison inverse des distances, on aura $x\sigma\sqrt{(1 + \rho'\rho')} = a\mathfrak{S}$, & qu'ainsi

(*d*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

on aura $\vartheta = \sigma(1+\theta)\sqrt{(1+\rho'\rho')}$; équation dans le ſecond membre de laquelle il ne ſe trouve que des quantités connues par obſervation. Afin de rendre le calcul encore plus ſimple, on peut ſuppoſer que $\rho' = 0$, c'eſt-à-dire, que l'obſervation ſe faſſe dans le nœud, & on aura pour lors $\vartheta = \sigma(1+\theta)$. Mais comme la parallaxe ϑ qui répond à la diſtance moyenne a, n'eſt que la parallaxe qui auroit lieu ſi l'orbite de la Lune étoit rapportée au plan de l'écliptique, il eſt aiſé de voir que la parallaxe de la Lune dans ſon orbite réelle eſt $\frac{\vartheta a}{x\sqrt{(1+\varrho\varrho)}}$ pour un lieu quelconque, ou $\frac{\vartheta}{1+\theta}$ cof. latit. en ſuppoſant $x = a(1+\theta)$ comme ci-deſſus; équation qui ſervira à former les tables de la parallaxe. On formera de la même maniere la table des diametres apparens, qui ſont toujours proportionnels à la parallaxe.

20. On emploiera une méthode analogue pour trouver la quantité conſtante μ qui entre dans l'expreſſion de la latitude. Soit μ' la latitude obſervée, & $\mu(1+\varpi)$ l'expreſſion de cette latitude, on aura $\mu = \frac{\mu'}{1+\varpi}$, équation dans laquelle ϖ eſt donné par la théorie, & μ' eſt donnée par obſervation.

21. Les calculs des art. 17 & 18 & des ſuivans ſuppoſent que le lieu moyen de la Lune eſt exactement ou preſque exactement connu. Mais pour plus de ſûreté, ſoit ſuppoſé qu'on ait commis l'erreur α' dans ce lieu

moyen, enſorte qu'au lieu de Z, il faille écrire $Z + \alpha'$. Soit enſuite obſervé un autre lieu de la Lune dans un temps quelconque; & comme le mouvement moyen de la Lune entre les deux temps d'obſervation eſt bien connu, ſur-tout ſi ces deux temps ne ſont pas très-éloignés l'un de l'autre, on aura la valeur de ce mouvement $= \xi$ quantité connue, & le lieu moyen pour le temps de la ſeconde obſervation ſera $Z + \xi + \alpha'$. Employant donc deux obſervations au lieu d'une, on aura deux inconnues α' & b à déterminer; & ſe ſervant d'une méthode analogue à celle de l'*art.* 3, la quantité α' qui eſt toujours peu conſidérable, ne ſera élevée dans les équations qu'au premier degré, ou tout au plus au ſecond, & ſera de plus dégagée des ſinus & coſinus qui la rendroient difficile à déterminer (*e*).

§. II.

Sur les Equations incertaines de la Théorie de la Lune.

1. J'ai fait voir dans le Tome V de mes Opuſcules, pages 336 & ſuivantes, que dans l'équation $ddz + Ntdz^2 + itdz^2 \cos. pz = 0$, le dernier terme quoique très-petit, pouvoit influer très-conſidérablement dans le mouvement de l'apogée. Ce n'eſt pas tout, & je ferai voir encore ici que ce terme peut influer conſidérablement ſur la valeur de certains autres termes de l'expreſſion de z.

(*e*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

2. Pour cet effet, ſoit $ddt + N^2 t dz^2 + i\varepsilon \text{ cof. } pz \cdot dz^2 + G dz^2 \text{ cof. } qz = 0$. Et ſoit F cof. qz le terme qui viendroit de G cof. qz dans la valeur de t; on ſuppoſera $t = F$ cof. $qz + M$ cof. $(qz + pz) + R$ cof. $(qz - pz)$, & on aura

$$dz^2 \text{ cof. } qz\left(-Fqq + N^2 F + G + \frac{iM}{2} + \frac{iR}{2}\right) + dz^2 \text{ cof. } (qz + pz) \times \left[-M(q+p)^2 + N^2 \cdot M + \frac{iF}{2}\right] + dz^2 \text{ cof. } (qz - pz) \times \left[-R(q-p)^2 + N^2 \cdot R + \frac{iF}{2}\right] = 0.$$

3. Or, ſi on n'avoit point d'égard aux termes qui renferment M & R, on auroit ſimplement $F = -\frac{G}{N^2 - qq}$; mais ſi on a égard aux termes qui renferment M & R, on aura les trois équations $-Fqq + N^2 \cdot F + G + \frac{iM + iR}{2} = 0$; $-M(q+p)^2 + N^2 \cdot M + \frac{iF}{2} = 0$; & $-R(q-p)^2 + N^2 R + \frac{iF}{2} = 0$. Ce qui donne $-Fqq + N^2 \cdot F + G + \frac{ii}{4} \times \left(-\frac{F}{N^2 - (q+p)^2} - \frac{F}{N^2 - (q-p)^2}\right) = 0$. La valeur de F ſera donc fort différente de celle qui réſulte de la premiere équation $F = -\frac{G}{N^2 - q^2}$, ſi la quantité $-\frac{ii}{4[N^2 - (q+p)^2]} - \frac{ii}{4[N^2 - (q-p)^2]}$

eſt comparable à $N^2 - q^2$. Or nous allons voir que cela peut arriver en un très-grand nombre de cas.

4. Soit $N^2 = 1 + 2\alpha$; $q = 1 + 6$, $p = 2 + \sigma$; & pour rendre ce calcul plus applicable à la Lune, $N^2 = 1 + 2\alpha n^2$, $q = 1 + 6n^2$, $p = 2 + \sigma$, $i = kn^2$, n^2 étant une aſſez petite fraction qui eſt environ $\frac{1}{180}$ dans la Théorie de la Lune; on aura pour la premiere valeur de F, ſavoir $-\frac{G}{N^2 - q^2}$, l'expreſſion $-\frac{G}{2(\alpha - 6)n^2}$; & pour la ſeconde $-G : [2(\alpha - 6)n^2 - \frac{k^2 n^4}{4(2\alpha n^2 - 2\sigma + 26n^2)}]$ à très-peu près, en négligeant les termes qui ſeroient très-petits par rapport aux autres. Or il n'eſt pas difficile de voir que le terme $\frac{k^2 n^4}{4(2\alpha n^2 - 2\sigma + 26n^2)}$ peut être très-comparable à $2(\alpha - 6)n^2$.

5. En effet, ſi on cherchoit par une méthode ſemblable à la précédente, le mouvement de l'apogée de la Lune, & qu'on nommât f cof. $K\zeta$ le terme qui donne ce mouvement, comme dans l'endroit cité ci-deſſus du cinquiéme Volume de nos Opuſcules, on auroit l'équation $-K^2 + N^2 - \frac{ii}{4[N^2 - (K-p)^2]} = 0$; ou en faiſant $K = 1 + \rho n^2$, l'équation $-2\rho + 2\alpha - \frac{k^2 n^4}{4(2\alpha n^2 - 2\sigma + 2\rho n^2)} = 0$. Or nous avons fait voir (*ibid.*) que dans la Théorie de la Lune, la valeur de ρ

qui réſultera de cette équation, peut être & ſera en effet fort différente de celle qui réſulteroit de l'équation ſimple $-2p+2\alpha=0$, fournie par la premiere approximation ; d'où il n'eſt pas difficile de conclure que le terme $\frac{k^2n^4}{4(2\alpha n^2-2\sigma+2\zeta n^2)}$ peut être très-comparable à $2(\alpha-\zeta)n^2$.

6. Soit $\sigma=-2\alpha$, comme il arrive dans la Théorie de la Lune, le terme $-\frac{k^2n^4}{4(2\alpha n^2-2\sigma+2\zeta n^2)}$, ainſi que $-\frac{k^2n^4}{4(2\alpha n^2-2\sigma+2\varsigma n^2)}$, ſe réduiroit à $-\frac{k^2n^2}{16}$ à très-peu près. Or on ſait par la Théorie de la Lune qu'un terme analogue à celui-là, augmente de près du double le mouvement de l'apogée.

7. Il eſt donc non-ſeulement poſſible, mais vraiſemblable, que le coefficient G deviendra beaucoup plus petit par le nouveau terme : je dis *beaucoup plus petit*, parce que ce terme augmentera le dénominateur de la valeur de G.

8. Si p eſt une quantité aſſez petite, & que q ſoit peu différent de l'unité, alors les deux termes $-\frac{ii}{4[N^2-(q+p)^2]}$ & $-\frac{ii}{4[N^2-(q-p)^2]}$ pourront influer conſidérablement l'un & l'autre ſur la valeur du coefficient G ; & en général toutes les fois que N^2 ſera peu différent de $(q+p)^2$ ou de $(q-p)^2$ ou de l'une & de l'autre de ces quantités, la valeur du coefficient G pourra être très-différente à la ſeconde

approximation de ce qu'elle étoit à la premiere. Il pourroit même arriver, ſi $(q+p)^2$ ou $(q-p)^2$ étoit preſqu'égal à N^2, que G devînt preſqu'infini à la ſeconde approximation. Mais pour lors, la valeur de G étant exprimée par une ſérie convergente, la méthode analytique que nous propoſons deviendroit légitimement ſuſpecte, & il faudroit tâcher d'y en ſubſtituer une autre plus exacte, qui peut-être ne ſeroit pas facile à trouver.

8. Les remarques précédentes peuvent être fort utiles pour trouver avec plus d'exactitude des termes qui peuvent être d'une valeur fort incertaine dans la Théorie de la Lune. On voit, par exemple, que ſi $q = 1 - n + \varpi n$, le coefficient G, dont la valeur eſt $-\frac{F}{NN-qq}$ par la premiere approximation, peut être extrêmement altérée par le terme $+ it \cdot \text{cof.}\, pz$. Il y a même lieu de croire, par l'*art.* 6, que ce coefficient ſera fort diminué, & que l'équation de $25''$ qui réſulte de la valeur du premier coefficient (Tome V des Opuſcules, p. 359) deviendra beaucoup plus petite, indépendamment des altérations qu'elle peut encore ſubir par d'autres termes.

9. Du reſte, la méthode des indéterminées que nous employons ici, me paroît tout-à-la-fois la plus ſimple & la plus ſûre pour trouver les coefficiens des différens termes avec l'exactitude dont ils ſont ſuſceptibles; & dans les cas où cette méthode ſeroit fautive, je ne

crois pas que les autres méthodes connues euſſent plus d'avantage (*f*).

§. III.

Sur l'Equation ſéculaire de la Lune.

1. J'ai fait voir encore dans le Tome V de mes Opuſcules, p. 385 & ſuiv. que l'équation ſéculaire, ſi elle eſt réelle, & ſi elle dépend de la Théorie de la gravitation, réſulte vraiſemblablement de certains termes A ſin. $\lambda\zeta$ dans leſquels λ eſt extrêmement petit, mais ſans être abſolument nul; car c'eſt une choſe digne de remarque, que tout terme B coſ. $\lambda\zeta$ de l'expreſſion du rayon vecteur, dans lequel λ ſeroit $= 0$ abſolu, ne donneroit dans l'expreſſion du temps qu'un terme de la forme $C\zeta$, qui ſe confondroit & ſe perdroit dans le moyen mouvement; au lieu que ſi λ n'eſt pas $= 0$, le terme A ſin. $\lambda\zeta$ peut donner au moyen mouvement une altération apparente, au moins pendant pluſieurs ſiécles. Voyez l'endroit cité du Tome V des Opuſcules.

2. Il faut néanmoins pour cela que le coefficient A ne ſoit pas trop petit: car s'il étoit tel, qu'en ſuppoſant ſin. $\lambda\zeta =$ au ſinus total, l'équation demeurât inſenſible, on ne s'appercevroit point alors d'aucune équation ſéculaire.

3. Comme le mouvement de l'apogée eſt à peu près le double du mouvement du nœud, j'avois penſé d'a-

(*f*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

bord

bord que les termes qui auroient pour argument $2z - 2pz + Nz - 3z + 3nz - 3\pi nz$ pourroient se réduire à un argument très-petit λz; puisque π est extrêmement peu différent de l'unité, étant égal (Tome V des Opuscules, pag. 383) à $1 - \frac{1}{360.15.15}$; & que p est presque $= -\frac{3n^2}{4}$, & $N =$ à très-peu près $1 - \frac{3n^2}{2}$. Mais si on s'en rapporte aux déterminations astronomiques admises jusqu'ici, je doute que la valeur de λ qui résultera de ces termes, soit assez petite; car $N = 1 - 0,008455$; $p = -0,004053$; d'où il s'ensuit que $\lambda = -0,000350$ à peu près. Donc λz sera $=$ à 90°, lorsque z sera $= 90^\circ \times \frac{1000000}{350} = \frac{360^\circ \times 10000 \times 25}{350}$; ce qui donne pour le temps employé à parcourir l'arc z, un mois périodique lunaire multiplié par $\frac{250000}{350}$ ou par $\frac{5000}{7}$; & comme un mois périodique lunaire est $=$ à 1 année $\times 0,0748$, on trouve que le temps employé à parcourir l'arc z est égal à environ 50 années. Or ce temps ne paroît pas assez considérable pour l'équation séculaire de la Lune, qui va toujours croissant, selon M. Mayer, & qui au bout de 100 ans n'est que de 9 secondes.

4. Il n'est pas difficile de trouver dans les équations de la Lune, poussées à l'infini, des termes qui ayent

des argumens $\lambda\zeta$, où λ ſoit très-petit. Car $1 - n$, par exemple, étant $= 0,9252$, & $N = 0,991545$, on peut toujours trouver facilement par les méthodes connues deux nombres entiers r, s, tels que $r(1-n) - sN$ ſoit égal à une fraction très-petite, par exemple, $0,000000001$; puiſqu'il n'y a qu'à faire $r \times 92520000 - s \times 99154500 = 1$, & pour lors on aura facilement r & s par des méthodes algébriques très-ſimples; & l'argument $[r(1-n) - s.N]\zeta$ ſeroit $= \lambda\zeta$, λ étant une quantité extrêmement petite.

5. Mais par la remarque faite ci-deſſus (art. 2), il n'eſt pas ſûr que de pareils termes puſſent donner une équation ſéculaire ſenſible; parce que plus les coefficiens r & s de l'argument $r(1-n)\zeta - sN\zeta$, ſeroient grands, plus le coefficient qui affecteroit le ſinus & le coſinus de ces angles ſeroit petit; ces deux quantités ou coefficiens ayant une ſorte de dépendance l'un de l'autre.

6. On voit par ces Remarques, 1°. qu'il n'eſt pas encore ſuffiſamment prouvé que l'équation ſéculaire de la Lune ne provienne pas de la gravitation. 2°. Qu'il eſt très-difficile d'aſſigner les termes qui peuvent la produire.

7. On peut faire quelques autres remarques importantes ſur l'équation ſéculaire de la Lune. En premier lieu, comme l'équation ſéculaire de la Terre eſt inſenſible, il faut que la cauſe qui produit l'équation ſéculaire de la Lune n'en puiſſe pas produire une ſenſible

dans la Terre ; par exemple, l'équation du rayon vecteur de la Lune contient un terme de cette forme $E n^2 \lambda \times$ cos. $\pi' n Z$, $\pi' n Z$ étant l'anomalie moyenne de la Terre, & λ ſon excentricité. Or la Théorie de M. de la Grange ſur l'action de Saturne & de Jupiter, fait voir aiſément que le rayon vecteur de la Terre doit contenir deux termes de cette forme λ cos. $\pi' n Z + \lambda'$ cos. $\pi'' n Z$, π' & π'' différant très-peu l'un de l'autre & de l'unité. Soit $n Z = Z'$, il eſt aiſé de voir que ces deux termes produiront dans le mouvement de la Terre une équation ſéculaire proportionnelle à $\frac{B \lambda \lambda'}{\pi' - \pi''} \times (\pi' - \pi'')^2 Z'^2 = B \lambda \lambda' (\pi' - \pi'') Z' Z'$, & dans le mouvement de la Lune une équation ſéculaire proportionnelle à $\frac{A n^4 \lambda \lambda' . (\pi' n - \pi'' n)^2 Z^2}{\pi' n - \pi'' n} = A n^5 \lambda \lambda' \times (\pi' - \pi'') Z Z = A n^3 \lambda \lambda' (\pi' - \pi'') Z' Z'$; c'eſt-à-dire, à cauſe de $n^2 = \frac{1}{178}$, beaucoup plus petite que $B \lambda \lambda' (\pi' - \pi'') Z' Z'$; à moins que A ne fût beaucoup plus grand que B, ce qui n'a pas lieu dans le cas préſent (*g*). Il paroît donc que l'équation ſéculaire de la Lune, produite par ces termes, ſeroit conſidérablement plus petite que celle de la Terre, & qu'ainſi les termes dont il s'agit ne peuvent être la cauſe réelle de l'équation ſéculaire de la Lune. Il en ſeroit de même de pluſieurs autres termes ſemblables, qui pourroient paroître donner l'équation ſéculaire de la Lune, & qui

(*g*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

ne la donneroient pas réellement, parce que des termes analogues à ceux-là dans l'orbite de la Terre, donneroient une équation séculaire de la Terre, plus grande que celle de la Lune.

8. En second lieu, l'équation qui exprime le mouvement de la Lune renfermant un terme de la forme $x^2 dz \int \pi x^3 dz$, & x étant à peu près constant, il est bien aisé de voir que si on pouvoit trouver un terme tout constant dans l'expression de π, il y auroit alors une équation séculaire. Or il faudroit pour cela examiner l'effet de l'action de la Terre sur la Lune, en ayant égard à la figure non sphérique de ces deux planetes; peut-être par le résultat du calcul, trouveroit-on dans la valeur de π un terme très-petit & constant, & pour lors on pourroit être dispensé de chercher d'autres causes de l'équation séculaire.

9. En troisiéme lieu, l'équation séculaire étant (Tome V de nos Opuscules, pag. 386) $-\frac{A\delta^2\lambda^2}{2}$ sin. $\lambda\zeta$, quantité dans laquelle λ est très-petit, on peut observer qu'en quelqu'endroit qu'on fasse commencer les arcs δ, c'est-à-dire, de quelque point de l'orbite qu'on fasse commencer l'observation de l'équation séculaire, sin. $\lambda\zeta$ sera toujours à peu près le même; car soit $\zeta + \rho$, un arc constant différent de ζ, on aura au lieu de sin. $\lambda\zeta$, sin. $(\lambda\zeta + \lambda\rho)$ qui en differe très-peu, $\lambda\rho$ devant être une quantité très-petite. D'où l'on voit qu'en quelque point qu'on commence à observer l'équation séculaire, elle

ſera toujours ſenſiblement proportionnelle au quarré du temps, au moins dans l'état actuel des obſervations, qui exigent & qui ſuppoſent que l'arc ♪, commençant à l'extrémité de l'arc ζ, donne λ ♪ très-petit; d'où il eſt viſible que l'arc ρ, commençant à l'extrémité du même arc ζ, donnera auſſi λ ρ très-petit (*h*).

(*h*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

REMARQUES
SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

(*a*) *Remarque pour l'article 9 du §. 1.*

QUAND on a trouvé la formule de la latitude, on peut en déduire directement celles du mouvement du nœud & de l'inclinaiſon ; pour cela il ſuffit de conſidérer que connoiſſant deux latitudes infiniment proches, & les deux rayons vecteurs correſpondans dans l'orbite projettée, on aura la poſition du plan de l'orbite *réelle* de la Lune en cet inſtant ; d'où l'on tirera la formule pour la poſition du nœud & l'inclinaiſon correſpondante. Le calcul en eſt facile à faire. En effet, ſoit dz l'angle décrit par la Lune dans l'orbite projettée, x le rayon vecteur de cette orbite, $x\rho$ la diſtance de la Lune à l'écliptique, on trouve aiſément l'inclinaiſon, en remarquant que ſi on appelle V l'angle de la ligne des nœuds avec le rayon x, on aura $\frac{x\varrho}{x \text{ ſin. } V}$ ou $\frac{\varrho}{\text{ſin. } V}$ = à la tangente de l'inclinaiſon, que j'appelle m. De plus on conſidérera que pendant l'inſtant dt, $\frac{\varrho}{\text{ſin. } V}$ eſt conſtant,

en ſuppoſant que la différence de V eſt dz ; de-là il ſuit que $\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dz \text{ cof. } V}{\text{ſin. } V}$, & tang. $V = \frac{\varrho dz}{d\varrho}$; d'où l'on tire ſin. $V = \frac{\varrho dz}{d\varrho \sqrt{(1 + \frac{\varrho^2 dz^2}{d\varrho^2})}} = \frac{\varrho dz}{\sqrt{(d\varrho^2 + \varrho^2 dz^2)}}$; & à cauſe de $m = \frac{\varrho}{\text{ſin. } V}$, on aura $m = \frac{\sqrt{(d\varrho^2 + \varrho^2 dz^2)}}{dz}$. Donc on aura 1°. ſin. V, & par conſéquent V, 2°. l'inclinaiſon variable de l'orbite lunaire. Mais il paroît plus ſimple & plus commode de ſe ſervir de la méthode de l'art. 9, pour avoir directement les formules du mouvement du nœud & de l'inclinaiſon.

On peut remarquer encore que ſi on nomme x' le rayon de l'orbite réelle, & dz' le petit angle correſpondant dans cette orbite à l'angle dz, on aura $\frac{x\,x\,dz}{x'\,x'\,dz'} =$ au coſinus de l'inclinaiſon diviſé par le ſinus total, ou $\frac{1}{\sqrt{(1+mm)}}$; donc à cauſe de $x' = x\sqrt{(1+pp)}$, on aura $\frac{dz}{(1+\varrho\varrho)dz'} = \frac{1}{\sqrt{(1+mm)}}$; de plus $x'dz' = \sqrt{(dx^2 + x^2 dz^2 + d(x\rho)^2 - d^2x^2)} =$ (en ſubſtituant & réduiſant) $\frac{x\sqrt{(dz^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 dz^2)}}{\sqrt{(1+\varrho\varrho)}}$; donc $1 = \frac{(1+\varrho\varrho)dz^2}{\sqrt{(dz^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 dz^2)}}$; & $\frac{1}{\sqrt{(1+mm)}} = \frac{dz}{\sqrt{(dz^2 + d\varrho^2 + \varrho^2 dz^2)}}$; ce qui donne la même valeur de m déja trouvée.

(*b*) *Remarque sur l'article* 12 *du* §. 1.

Pour calculer plus aiſément les valeurs de x & de ζ dans les équations A & B, on peut conſidérer,

1°. Que $x = a(1+\theta)$, θ étant une quantité aſſez petite, enſorte qu'au lieu de x & de ſes puiſſances, on peut mettre $a(1+\theta)$ & ſes puiſſances juſqu'à θ^3 incluſivement, les autres puiſſances ne paroiſſant pas néceſſaires, parce que la plus grande équation eſt celle du centre, dont on peut ſe contenter de pouſſer les termes juſqu'aux quantités très-petites de l'ordre de b^3. Cependant on pourra aller juſqu'aux θ^4, & même au-delà, ſi on juge que le calcul l'exige dans les termes que l'intégration doit augmenter beaucoup.

2°. Que dans ces mêmes équations A & B, ou plutôt dans celles qui en réſultent, il faut, au lieu de a^3, écrire $a^3(1+\epsilon)$, ϵ étant une très-petite quantité qu'on déterminera par la condition qu'il ne doit point ſe trouver de terme conſtant dans la valeur de θ.

3°. Au lieu de ſuppoſer $x = a(1+\theta) = a(1+b\cos.NZ+c\cos.2NZ,$ &c.) &c. & $a^3 = a^3(1+\epsilon)$, on pourroit ſuppoſer $x = a(1+a'+b'\cos.NZ+c'\cos.2NZ,$ &c.) auquel cas la valeur de x contiendroit un terme tout conſtant a', qu'on détermineroit de même, en faiſant = 0 le terme tout conſtant de l'équation. Mais il nous paroît plus commode & plus ſimple de faire $x = a(1+b\cos.NZ$ &c.) & $a^3 = a^3(1+\epsilon)$.

4°.

4°. Le produit de a' sin. $p\zeta$ par b' cos. $q\zeta$ est comme l'on fait $a'b'\left[\frac{\text{sin. }(p+q)\zeta}{2}+\frac{\text{sin. }(p-q)\zeta}{2}\right]$; & celui de $\mathfrak{C}'$ sin. $q\zeta$ par a' cos. $p\zeta$ est $a'\mathfrak{C}'\left[\frac{\text{sin. }(q+p)\zeta}{2}+\frac{\text{sin. }(q-p)\zeta}{2}\right]$; d'où la somme de ces deux produits est $\left[\frac{a'b'+a'\mathfrak{C}'}{2}\right]$ sin. $(p+q)\zeta+\left[\frac{a'b'-a'\mathfrak{C}'}{2}\right]$ sin. $(p-q)\zeta$. De même le produit de b' cos. $q\zeta$ par $-a'pp$ sin. $p\zeta$ est $-a'b'pp\left[\frac{\text{sin. }(p+q)\zeta}{2}+\frac{\text{sin. }(p-q)\zeta}{2}\right]$; celui de a' cos. $p\zeta$ par $-b'qq$ sin. $q\zeta$, est $-\frac{a'b'qq}{2}$ [(sin. $q\zeta+p\zeta$) + sin. $(q\zeta-p\zeta)$]; celui de $-2b'q$ sin. $q\zeta$ par $a'p$ cos. $p\zeta$ est $-a'b'pq\times$ [sin. $(p+q)\zeta-$ sin. $(p-q)\zeta$]; & enfin celui de $-2a'p$ sin. $p\zeta$ par $b'q$ cos. $q\zeta$ est $-a'b'pq$ [(sin. $p\zeta+q\zeta$) + sin. $(p\zeta-q\zeta)$]. Au moyen de ces Remarques il sera facile d'abréger le calcul des différens termes des équations différentielles de l'orbite lunaire. En effet, dans l'équation (B), par exemple, les deux termes $xddz+2dxdz$, donneront en mettant pour z sa valeur $Z+\alpha$, les termes $xddz+2dxdZ+2dxd\alpha$; or, 1°. s'il y a dans x deux termes de la forme a' cos. $p\zeta+b'$ cos. $q\zeta$, il y en aura dans α deux correspondans, de la forme a' sin. $p\zeta+\mathfrak{C}'$ sin. $q\zeta$. 2°. Les termes de ddx seront les mêmes que ceux de x, aux coefficiens près, c'est-à-dire, que si α contient un terme de la forme e' sin. pz,

$dd\alpha$ en contiendra un de la forme $-a'pp \times \text{sin. } p\zeta$; 3°. il en ſera de même des termes de $dd\alpha$ & de $dx\,dZ$, 4°. Les termes du produit $2\,dx\,d\alpha$ ſeront reſpectivement $-2b'q \text{ sin. } q\zeta \times a'p \text{ cof. } p\zeta - 2a'p \text{ sin. } p\zeta \times b'q \text{ cof. } q\zeta$, &c; & ceux du produit $x\,dd\alpha$ auront la même forme, comme il eſt aiſé de le voir, que ceux du produit $2\,dx\,d\alpha$; d'où l'on voit qu'on peut avoir aiſément & tout-à-la-fois les coefficiens de ſin. $(p \pm q)\zeta$ dans la valeur de $x\,dd\alpha + 2\,dx\,dZ + 2\,dx\,d\alpha$; ce qui abrégera beaucoup le calcul, & qui n'a pas beſoin, ce me ſemble, d'être expliqué & développé plus au long.

5°. L'équation (E) de la latitude de la Lune (*art.* 8) peut être miſe ſous la forme $-d(x\,x\,d\rho) - \rho x^2 d\zeta^2 + \frac{a^3 \rho x\,dZ^2}{T+L} \times \varphi \text{ cof. } (\zeta - \zeta') = 0$; ou encore ſous celle-ci $-dd(x\rho) + \rho\,dd\,x - \rho x\,d\zeta^2 + \frac{a^3 \rho\,dZ^2}{T+L} \times \varphi \text{ cof. } (\zeta - \zeta') = 0$, laquelle en faiſant $x\rho = \zeta$, ſe change en $-dd\zeta + \frac{\zeta\,dd\,x}{x} - \zeta\,d\zeta^2 + \frac{a^3 \zeta\,dZ^2}{x(T+L)} \times \varphi \text{ cof. } (\zeta - \zeta') = 0$; équation dans laquelle ζ eſt la diſtance de la Lune à l'écliptique. Mais pour la conſtruction des tables, il eſt plus commode de déterminer ρ que ζ.

(c) *Remarque ſur l'article* 15 *du* §. 1.

Voici une Remarque qui pourra être fort utile pour trouver d'une maniere aſſez ſimple la valeur de N, ſoit en ſe ſervant de l'équation qui repréſente le mouvement

moyen de la Lune, soit en employant celle du lieu vrai. Nous avons déja observé (Tome V des Opuscules, pag. 339) que l'équation en N doit manquer de tous ses termes pairs, & qu'elle aura pour racines les coefficiens des différens argumens. D'où il résulte que dans la Lune, par exemple, si on nomme x' le mouvement de l'apogée, les différentes valeurs de N^2 seront $x'x'$, $(z-2n)^2$, $(z-2n+x')^2$, $(z-2n-x')^2$, &c. Par conséquent si on appelle A le coefficient du second terme de l'équation (qui est ici proprement le troisiéme) ce coefficient pris en signe contraire devant être égal à la somme des racines, on aura $-A = x'x' + (z-2n)^2 + 2(z-2n)^2 + 2x'x'$, &c. d'où l'on tirera par une simple équation du premier degré, la valeur de $x'x'$, valeur qui sera d'autant plus exacte, qu'on aura poussé plus loin le calcul de l'équation qui doit donner la valeur de N. L'avantage de cette méthode est donc d'être d'autant plus exacte, que l'équation en N est d'un degré plus haut, sans néanmoins qu'on soit obligé de chercher les racines de cette équation en N, & sans qu'on ait jamais d'autre équation à résoudre qu'une équation qui contiendra simplement $x'x'$; car cette équation ne sera pas même du second degré, parce que les termes où seroit x' ne s'y trouveront pas, comme on le voit par les quantités $(z-2n+x')^2$, $(z-2n-x')^2$, dont la somme fait disparoître le terme où seroit x'. Il en sera de même des autres argumens qui renferment x', & dont la somme fera disparoître le terme où se-

roit x', comme $(\pi n + x')^2$, $(\pi n - x')^2$; $(2 - 2n + \pi n + x')^2$, $(2 - 2n + \pi n - x')^2$; $(2 - 2n - \pi n + x')^2$, $(2 - 2n - \pi n - x')^2$; & ainſi des autres à l'infini.

Pour rendre la raiſon de cette méthode très-ſenſible par un exemple ſimple, ſoit $ddt + A'tdz^2 + Bdz^2 \times$ cof. $qz = 0$; d'où l'on tire $d^4t + Addtdz^2 - Bqqdz^4$ coſin. $qz = 0$, & (en chaſſant coſin. qz) $qqddtdz^2 + Aqqtdz^4 + d^4t + Addtdz^2 = 0$; faiſant donc $t = f$ cof. Nz, on aura l'équation $N^4 - N^2(A' + qq) + Aq^2 = 0$; donc les valeurs de N^2 ſeront A & qq, comme en effet elles le doivent être; puiſque la valeur de t, par les méthodes connues, ſe trouvera f cof. $z\sqrt{A} + g$ cof. qz; d'où il réſulte que l'équation en N aura pour racines les coefficiens des argumens.

Je remarquerai encore à cette occaſion, que la double valeur qu'on trouve pour le mouvement de l'aphelie dans la Théorie des Planetes, (Tome V des Opuſcules, pag. 342) ſe trouveroit de même pour le mouvement de l'apogée de la Lune, ſi on combinoit la Théorie de la Lune avec celle de la Terre, & qu'on eût égard dans la Théorie de ces deux Planetes & dans le calcul du mouvement de leurs apſides, aux termes qui contiennent $t'dz^2$ cof. $(z - nz)$ pour la Lune, & tdz^2 cof. $\left(z' - \frac{z'}{n}\right)$ pour la Terre, t' & t étant les petites quantités variables qu'il faut ajouter à la dif-

tance moyenne de la Terre au Soleil, & de la Lune à la Terre, pour avoir l'expreſſion du rayon vecteur. Ces deux valeurs qui donneront le mouvement de l'apogée de la Lune, ſeront x', & $1 - n + \pi n$, ou $1 - n + ny$; π ou y déſignant le mouvement des apſides de la Terre; & pour la Terre elles ſeront y ou π, & $-\frac{1}{n} + 1 + \frac{x'}{n}$.

Il eſt évident, par les mêmes raiſons, que ſi dans la Théorie de Jupiter & de Saturne, par exemple, on nomme x' le mouvement de l'aphelie de Jupiter, cauſé par l'action de Saturne, abſtraction faite de l'excentricité de cette derniere Planete, & y le mouvement de l'aphelie de Saturne, cauſé par l'action de Jupiter, abſtraction faite de ſon excentricité, les deux valeurs de N pour Jupiter, ſeront x' & $1 - n + ny$; & pour Saturne y, & $-\frac{1}{n} + 1 + \frac{x'}{n}$.

Cette Remarque explique, ce me ſemble, d'une maniere fort ſimple le double mouvement des apſides dans la Théorie des Planetes ſupérieures; mouvement que M. de la Grange a remarqué le premier. On voit 1°. que ce double mouvement aura toujours lieu dans la Théorie des Planetes & de leurs Satellites; 2°. que de ces deux mouvemens, le vrai & propre mouvement de l'apſide eſt celui qui vient de l'action de la Planete perturbatrice, abſtraction faite de ſon excentricité; 3°. que la ſeconde valeur du mouvement de l'apſide n'eſt autre

choſe que l'élongation des deux Planetes, plus l'anomalie de la Planete perturbatrice; & que cette ſeconde valeur n'auroit pas lieu ſi la Planete perturbatrice étoit ſans excentricité.

On peut obſerver encore, d'après la méthode indiquée ci-deſſus, que les valeurs de N^2 dans une des Planetes ſeront x'^2, & $(1-n+nx)^2$, $(1-n-nx)^2$, &c. & que les valeurs de N'^2 dans l'autre Planete ſeront y^2 & $\left(-\frac{1}{n}+1+\frac{x'}{n}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{n}+1-\frac{x'}{n}\right)^2$, &c. d'où l'on tirera, comme ci-deſſus, les valeurs de x'^2 & de y^2 par le moyen des ſeconds termes de chacune de ces deux équations.

Ces différentes vues, que je ne fais qu'indiquer ici, pourront peut-être ſervir à ſimplifier & faciliter la recherche du mouvement des apſides dans le ſyſtême de la gravitation.

A l'occaſion de ces réflexions ſur le mouvement de l'apogée, je crois devoir parler ici d'une méthode pour déterminer ce mouvement, qui a induit en erreur d'habiles Géometres.

Soit l'équation $ddu+udz^2-Adz^2+\frac{Bn^2}{u^m}dz^2=0$, u étant $=\frac{1}{x}=1+t$, $A=1+C$, Bn^2 très-petit; & 1 la diſtance initiale; on aura en ſubſtituant (& en négligeant les quantités très-petites) $ddt+dz^2(t-mBn^2t)-Cdz^2+Bn^2dz^2=0$; d'où il eſt clair que

la valeur de z renferme un terme de cette forme f cos. Nz, N étant $= \sqrt{(1 - mBn^2)}$.

Soit maintenant $x = \frac{1}{u} = \frac{1}{1+t}$; il eſt aiſé de voir en ſubſtituant la valeur de u, que celle de x renfermera auſſi un terme de cette forme $-f$ coſin. Nz, ou plus exactement $+g$ coſin. Nz, N étant auſſi $= \sqrt{(1 - mBn^2)}$.

Si on avoit $m = -1$, l'équation différentielle en u s'intégreroit rigoureuſement, & le mouvement des apſides ſeroit donné par la quantité $\sqrt{(1 + Bn^2)}$.

Subſtituons maintenant dans l'équation différentielle au lieu de u ſa valeur en x, ou ce qui revient au même, au lieu de u ſa valeur $\frac{1}{1+\theta}$ en faiſant $1 + \theta = x$, nous aurons l'équation $-\frac{dd\theta}{(1+\theta)^2} + \frac{2d\theta^2}{(1+\theta)^3} + \left(\frac{1}{1+\theta} - A\right) dz^2 + Bn^2 dz^2 \times (1+\theta)^m = 0$; d'où réſulte $-dd\theta(1+\theta) + 2d\theta^2 + dz^2(1+\theta)^2 \times (-\theta - C\theta) + dz^2(m+3)\theta . Bn^2 + dz^2(-C + Bn^2) = 0$; de-là on voit (en négligeant les puiſſances de θ, & les produits au-delà d'une dimenſion) 1°. que le coefficient du terme $-dd\theta$ eſt l'unité. 2°. Que celui du terme θdz^2 eſt $-1 - C + Bn^2(m+3)$; or de-là il paroîtroit réſulter un mouvement des apſides différent de celui qu'on a trouvé dans l'article précédent.

Si dans cette équation au lieu de θ, on écrivoit $C + \sigma$, on trouveroit, après avoir diviſé par $1 + C$, que le

coefficient de σdz^2 ſeroit à très-peu près $-1+Bn^2\times(m+3)$, ce qui donneroit un mouvement très-fautif des apſides, ſi on s'en tenoit à ces ſeuls termes, puiſque dans le cas, par exemple, de $m=-1$, ce mouvement ſeroit donné par la quantité $\sqrt{(1-2Bn^2)}$, très-différente de $\sqrt{(1+Bn^2)}$ qui donne le vrai mouvement.

Pour lever cette difficulté, ſoit repriſe l'équation $ddu+udz^2-Adz^2+\frac{Bn^2dz^2}{u^m}=0$. On fera $u=K+f$ cof. Nz, & on aura en ſubſtituant $-N^2+1-\frac{mBn^2}{K^{m+1}}=0$; & $K-A+\frac{Bn^2}{K^m}=0$. Enſuite ſoit ſuppoſé $u=\frac{1}{x}$, & on aura $-ddx+\frac{2dx^2}{x}+xdz^2-Ax^2dz^2+Bn^2x^{m+2}dz^2=0$; & en faiſant $x=K'+f'$ cof. $N'z$, on aura $+N'^2+1-2AK'+mBn^2K'^{m+1}+2Bn^2K'^{m+1}=0$; & $K'-AK'^2+Bn^2K'^{m+2}=0$, ou $K'=\frac{1+Bn^2K'^{m+1}}{A}$; donc $+N'^2+1-2+mBn^2K'^{m+1}=0$; ce qui donne pour N'^2 une valeur ſenſiblement égale à celle de N^2, K' étant ſuppoſé ſenſiblement égal à l'unité, & Bn^2 étant très-petit.

De-là il eſt aiſé de conclure, que pour trouver la valeur de θ dans l'équation différentielle du ſecond ordre dont le premier terme eſt $-dd\theta$, il ne faut pas ſe borner au coefficient du terme θdz^2 dans cette équation, il faut faire $\theta=p+f'$ cof. $N'z$, p & f' étant très-petits, & avoir égard dans le calcul aux termes de l'ordre

l'ordre de θ^2, ou du moins à quelques-uns de ces termes. D'où il doit réſulter une valeur de N' égale à celle qu'on vient de trouver. Mais pour faire le calcul plus facilement, ſans être obligé d'avoir égard aux quantités de l'ordre de θ^2, on mettra l'équation ſous cette forme $-dd\theta + \frac{2d\theta^2}{1+\theta} + (1+\theta)\,dz^2 - (1+G)\times(1+\theta)^2\,dz^2 + Bn^2(1+\theta)^{m+2}\,dz^2$; forme analogue à celle de l'équation $-dddx + \frac{2dx^2}{x}$, &c. $= 0$; & ſuppoſant $\theta = p + f'$ cof. $N'z$, on aura $N'^2 + 1 - 2(1+G)(p+1) + (mBn^2 + 2Bn^2)(1+p)^{m+1} = 0$; & $1 + p - (1+G)(1+p)^2 + Bn^2(1+p)^{m+2} = 0$; d'où l'on tire comme ci-deſſus la valeur de N'^2 par l'équation $N'^2 + 1 - 2 + mBn^2(1+p)^{m+1} = 0$; qui revient au même que la précédente.

En général, ſoit au lieu de l'équation $-dddx + \frac{2dx^2}{x} + x\,dz^2 - Ax^2\,dz^2 + Bn^2\,x^{m+2}\,dz^2 = 0$, celle-ci (qui n'eſt autre choſe que la même équation multipliée par x^k) $- x^k\,dddx + 2x^{k-1}\,dx^2 + x^{k+1}\,dz^2 - Ax^{k+2}\,dz^2 + Bn^2\,x^{m+2+k}\,dz^2 = 0$; ſi on fait comme ci-deſſus $A = 1 + G$, G étant ſuppoſé fort petit, & qu'on faſſe auſſi $x = K' + f'$ cof. Nz ou $= 1 + p + f'$ cof. Nz, & $N^2 = 1 + a$; on aura les équations ſuivantes $N^2\,K'^k + K'^k(k+1) - (1+G)(k+2)\,K'^{k+1} + Bn^2(m+2+k)\times K'^{m+1+k} = 0$; & $K'^{k+1} - (1+G)\,K'^{k+2} + Bn^2\,K'^{m+2+k} = 0$. D'où l'on tire,

en faiſant évanouir K', la même valeur de N^2 que ci-deſſus ; puiſqu'on aura $(1+6)K' = 1 + Bn^2 K'^{m+1}$, K' étant preſque $= 1$; comme auſſi $N^2 + k + 1 - (1+6)(k+2)K' + Bn^2(m+2+k)K'^{m+1} = 0$, ou (en réduiſant & mettant pour N^2 ſa valeur $1+\alpha$) $\alpha + mBn^2 K'^{m+1} = 0$. D'un autre côté ſi dans l'équation $-x^2 dd x$, &c. $= 0$, on met $1+\theta$ à la place de x, & $p + f' \cos. Nz$ à la place de θ, on verra en ſubſtituant auſſi pour N^2 ſa valeur $1+\alpha$, que dans la premiere des deux équations réſultantes (dans celle dont tous les termes ont pour facteur f' cof. Nz) tous les termes finis, ou plutôt de l'ordre de f', ſe détruiront, & qu'il ne reſtera que des termes de l'ordre de $6f'$ & de pf'. Il faudra donc avoir égard à ces termes pour déterminer α ; & on ne peut y avoir égard qu'en ne négligeant pas dans l'équation en θ, les puiſſances θ^2 ni le produit $\theta\, dd\theta$, puiſqu'à cauſe de $\theta = p + f' \cos. Nz$, ces puiſſances & ce produit donnent des termes de l'ordre de pf'. Et on ne ſera pas ſurpris, en effet, en conſidérant la choſe avec un peu d'attention, qu'une équation de cette forme $dd\theta + (1+\alpha)\theta\, dz^2 + C\theta^2 dz^2$, &c. $= 0$, dans laquelle α & θ ſont ſuppoſés très-petits, donne un mouvement d'apogée qui dépende en partie du terme $C\theta^2 dz^2$, puiſque ce terme $C\theta^2 dz^2$ eſt du même ordre que le terme $\alpha\theta\, dz^2$, d'où dépend auſſi en partie ce mouvement.

Dans la Théorie de la Lune $m = 3$, $B = \frac{1}{2}$ à peu près ; & la ſolution exacte du problême donne $N =$

$\sqrt{(1 - \frac{3n^2}{2})}$, d'où il ne réſulte que la moitié du mouvement réel de l'apogée, le reſte étant donné, comme on ſait, par les forces proportionnelles au ſinus & au coſinus de $2Z - 2nZ$. Mais ſi on employoit la ſolution fautive que nous venons d'indiquer, on trouveroit $N = \sqrt{(1 - 3n^2)}$, c'eſt-à-dire, le mouvement de l'apogée tel à peu près que les obſervations le donnent. Ainſi la vérité de ce réſultat ne prouveroit rien en faveur de la méthode.

(*d*) *Remarque pour les articles* 17 *&* 18 *du §.* 1.

Les quantités a & μ peuvent ſe rencontrer dans quelques petits termes des équations qui ſervent à déterminer b; mais on peut ſuppoſer alors ces quantités à peu près connues, comme elles le ſont en effet, & on les déterminera enſuite plus rigoureuſement par le reſte du calcul; voyez les *art.* 19 & 20.

On peut remarquer encore que les termes les plus ſenſiblement affectés de b, ſont ceux qui ont pour argumens $N.Z$ & $2Z - 2nZ - N.Z$; & comme ces termes ont le même ſigne, il s'enſuit qu'ils ſeront les plus ſenſibles quant à leur effet, lorſque $N.Z$ ſera $= 90°$ ou $270°$; & lorſque $Z - nZ$ ſera $= 90°$ ou $270°$. Ainſi il ſeroit bon, pour déterminer b, de préférer les points où Z & $Z - nZ$ ont à peu près ces valeurs.

Au reſte, comme on connoît déja à peu près par les obſervations les valeurs de b, a, μ, que j'appelle b',

a', μ', on pourra ſuppoſer $b = b' + \mathfrak{C}'$, $a = a' + a'$, $\mu = \mu' + \nu'$, & ſe contenter de déterminer $\mathfrak{C}'$, a' & ν'; ce qu'on pourra faire par le moyen de pluſieurs obſervations, en prenant un milieu entre les valeurs de $\mathfrak{C}'$, a' & ν' qui en réſulteront.

(*e*) *Remarque ſur l'article* 21 *du* §. 1.

Il paroît encore plus ſimple & plus commode d'employer, pour déterminer le lieu moyen de la Lune, la méthode expoſée dans la troiſiéme Partie de nos Recherches ſur le Syſtême du Monde, pag. 35 & ſuiv. Celle que nous propoſons ici peut auſſi ſervir, au moins juſqu'à un certain point, pour fixer les époques des autres moyens mouvemens, entr'autres de celui de l'apogée de la Lune. Quant au moyen mouvement du nœud, la méthode qui paroît la plus ſimple pour le trouver eſt de chercher d'abord le mouvement réel du nœud par l'équation de l'*art.* 9 ci-deſſus, & d'employer enſuite un calcul analogue à celui qui a été indiqué dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, p. 35, pour trouver le lieu moyen. C'eſt en partie pour cette raiſon qu'il ne ſeroit peut-être pas inutile, indépendamment de la formule de la latitude de la Lune, d'avoir auſſi la formule du mouvement du nœud.

(*f*) *Remarque pour l'article* 9 *du* §. 2.

On peut remarquer que les termes dont l'argument

eſt $\zeta - n\zeta + \pi n\zeta$, ſeront d'autant plus grands, toutes choſes d'ailleurs égales, dans la valeur du rayon vecteur, & par conſéquent dans celle du lieu vrai, que le mouvement de l'apogée de la Planete ſera plus petit, & qu'ainſi, toutes choſes d'ailleurs égales, ils doivent être plus ſenſibles à proportion dans Saturne & dans Jupiter que dans la Lune, & plus ſenſibles auſſi à proportion dans les Satellites de ces Planetes que dans la Lune.

A cette Remarque nous en joindrons une autre. Nous avons fait voir dans le paragraphe préſent, que s'il ſe rencontre dans l'équation de la Lune des termes de cette forme it cof. $p\zeta$, p étant preſque $= 2$, il en peut réſulter une grande altération dans le coefficient des termes qui ont pour argument ſin. $(\zeta - n\zeta + \pi' n\zeta)$. Or il me ſemble que dans la Théorie du mouvement de la Terre, cauſé par l'action de Jupiter & de Saturne, il doit ſe trouver des termes analogues à ceux-là. Car dans l'expreſſion de l'action de Jupiter & de Saturne ſur la Terre, il doit ſe trouver des termes de la forme A cof. $p\zeta$, p étant $= 2 - 2n$, comme dans la Lune, & n étant auſſi (pour Jupiter) environ $\frac{1}{12}$ comme dans la Lune, & pour Saturne environ $\frac{1}{30}$. Il faut donc avoir beaucoup d'attention à ces ſortes de termes pour s'aſſurer ſi on a calculé exactement (dans la Théorie du mouvement de la Terre, altéré par Jupiter & par Saturne) le terme dont l'argument eſt $\zeta - n\zeta + \pi' n\zeta$, & qui dépend de l'action de Jupiter ou de Saturne,

combinée avec l'excentricité de Saturne ou de Jupiter.

Nous avons vu auſſi que ces mêmes termes de la forme it coſin. pz ont une influence conſidérable ſur le mouvement de l'apogée de la Lune. Il pourroit donc en être de même du mouvement de l'aphelie de la Terre, en tant qu'il eſt cauſé par l'action des deux Planetes. Nouvelle raiſon pour avoir beaucoup d'égard à ces ſortes de termes dans la Théorie de l'action des deux Planetes ſur la Terre. Il eſt vrai que les coefficiens qui en réſulteront ſeront fort petits, l'action des deux Planetes ſur la Terre étant peu conſidérable ; mais il eſt vrai auſſi qu'ils pourroient être du même ordre que ceux qui auront été calculés dans la premiere approximation, & qu'ainſi ils ne doivent pas être négligés, ſi on veut avoir un réſultat auſſi exact qu'il eſt poſſible.

Cette conſidération n'a pas lieu dans la Théorie des perturbations réciproques de Jupiter & de Saturne, parce que dans cette Théorie, n n'eſt plus très-petit, étant $= \frac{12}{30}$ pour Jupiter, & $\frac{30}{12}$ pour Saturne.

(*g*) *Remarque ſur l'article* 7 *du §.* 3.

Pour déterminer A & B, on conſidérera 1°. que le rayon de l'orbite terreſtre étant ſuppoſé $B'(1 + \lambda \text{ coſ. } \pi Z' + \lambda' \text{ coſ. } \pi' Z')$, il en reſulte dans l'expreſſion du temps un terme $= \frac{\lambda\lambda'}{\pi - \pi'} \text{ ſin. } (\pi - \pi') Z'$. 2°. Que dans le rayon vecteur de la Lune on aura (*Recherches ſur le Syſt. du Monde*, I Part. art. 66),

deux termes de cette forme $\frac{3n^2\lambda}{2}$ cof. πnZ + $\frac{3n^2\lambda'}{2}$ cof. $\pi' nZ$, qui donneront dans l'expreſſion du temps un terme égal à $\frac{27\lambda\lambda'.n^4}{4(\pi-\pi')n}$ ſin. $(\pi-\pi')nZ$. Or (Tome V de nos Opuſcules, page 386) le terme $\frac{\lambda\lambda'}{\pi-\pi'}$ ſin. $(\pi-\pi')Z$, donne pour l'équation ſéculaire de la Terre $-\frac{\lambda\lambda'\delta'^2(\pi-\pi')^2}{2(\pi-\pi')}\times$ ſin. $(\pi-\pi')\zeta'$; & on aura par la même raiſon, pour l'équation ſéculaire de la Lune, $-\frac{27\lambda\lambda'.n^4.n^2\delta'^2(\pi-\pi')^2}{2.4(\pi-\pi')n}\times$ ſin. $(\pi-\pi')n\zeta$. Or $n\delta=\delta'$, & $n\zeta=\zeta'$. Donc l'équation ſéculaire de la Lune ſera à celle de la Terre comme $\frac{27n^3}{4}$ à 1, c'eſt-à-dire, qu'elle ſeroit beaucoup plus petite que celle de la Terre, ſi elle venoit de termes ſemblables ou analogues à ceux que nous conſidérons ici.

(*h*) *Remarque ſur l'article 9 du §. 3.*

Comme dans le calcul dont il s'agit ici, & dans celui de la Remarque précédente, l'arc ζ commence au point où tous les argumens ont été à-la-fois = o, il faut pour déterminer cet arc ζ, connoître le point de l'orbite & l'inſtant où tous les argumens à-la-fois ont été nuls. Pour cela on remarquera qu'il y a ici cinq points mobiles à conſidérer, la Lune, ſon apogée, le Soleil, ſon apogée, & enfin le nœud de la Lune. Soit T'

le temps que la Lune employe à faire une révolution moyenne, t le temps qui s'eſt écoulé depuis le moment où tous les argumens à-la-fois ont été $= 0$, l'arc moyen parcouru par la Lune durant ce temps t, ſera évidemment $\frac{360^\circ . t}{T'}$; de même l'arc moyen parcouru par l'apogée de la Lune ſera $\frac{360^\circ . t}{T''}$, & l'arc moyen parcouru par les trois autres points ſera $\frac{360^\circ . t}{T'''}$, $\frac{360^\circ . t}{T^{IV}}$, $\frac{360^\circ . t}{T^{V}}$. Maintenant au bout du temps t, c'eſt-à-dire, dans un inſtant connu & pris à volonté, la diſtance moyenne & connue de la Lune à ſon apogée, ſera $= \alpha'$, de la Lune au Soleil α'', du Soleil à ſon apogée α''', de la Lune à ſon nœud α^{IV}, ce qui donnera les équations ſuivantes, dans leſquelles λ', λ'', &c. ſont des nombres entiers poſitifs.

$$360^\circ \left(\frac{t}{T'} - \frac{t}{T''}\right) = \alpha' + \lambda' . 360^\circ$$

$$360^\circ \left(\frac{t}{T'} - \frac{t}{T'''}\right) = \alpha'' + \lambda'' . 360^\circ$$

$$360^\circ \left(\frac{t}{T'} - \frac{t}{T^{IV}}\right) = \alpha''' + \lambda''' . 360^\circ$$

$$360^\circ \left(\frac{t}{T'} - \frac{t}{T^{V}}\right) = \alpha^{IV} + \lambda^{IV} . 360^\circ.$$

On aura donc 1°. $\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T''}\right) \times (\alpha'' + \lambda'' . 360^\circ) = \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T'''}\right) \times (\alpha' + \lambda' . 360^\circ)$, équation qui pourra toujours ſe réduire à cette forme $A + B\lambda' + C\lambda'' = 0$,

λ'

λ' & λ'' étant des nombres entiers positifs. En réfolvant cette équation indéterminée par les méthodes connues & élémentaires pour les problêmes de ce genre, on aura des valeurs de λ' & de λ'', dans leſquelles entrera un nouveau nombre entier indéterminé ρ.

On aura de même, en combinant la ſeconde & la troiſiéme équation, $\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T''}\right)(\alpha''' + \lambda'''.360°) = \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T^{IV}}\right)(\alpha'' + \lambda''.360°)$; & mettant pour λ'' ſa valeur trouvée en ρ, on aura une nouvelle équation de la forme $A + B'\rho + C'\lambda''' = 0$, d'où l'on tirera les valeurs de ρ & de λ''', qui renfermeront un nouveau nombre entier indéterminé ρ'.

En opérant de même ſur la troiſiéme & la quatriéme équation, on aura les valeurs de ρ' & de λ^{IV} exprimées par une nouvelle indéterminée ρ'', qui ſera un nombre entier; & prenant ce nombre le plus petit qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, égal à l'unité, ou même à zéro, ſi le cas le permet, on aura les valeurs de λ', λ'', λ''', λ^{IV}, & de-là celle de t, & par conſéquent celle de $\zeta = \frac{360°.t}{T'}$.

Pour faciliter les calculs, on peut ſuppoſer $T'' = aT'$, $T''' = bT'$, $T^{IV} = cT'$, &c. $\alpha' = a'.360°$, $\alpha'' = b'.360°$, &c. a, b, c, &c. & a', b', c', &c. exprimant des fractions décimales. Par ce moyen les coefficiens A, B, C, dans l'équation $A + B\lambda' + C\lambda'' = 0$, & les coefficiens A', B', C', &c. dans les

autres équations analogues à celle-là, ſeront aiſément transformés en des nombres entiers ; & le problême n'aura pas plus de difficulté que celui qui conſiſte à trouver l'année de la Période Dyoniſienne qui répond à un cycle lunaire & à un cycle ſolaire donnés.

Ajoutons ici ſur l'équation ſéculaire, 1°. que ſi $\lambda\zeta$ étoit $= 0$ ou très-petit, l'équation ſéculaire ne ſeroit plus ſenſible, ou du moins ne ſeroit plus ſenſiblement proportionnelle à δ^2, mais à δ^3 cof. $\lambda\zeta$ ou à δ^3, comme il eſt aiſé de le voir par les formules du Tome V de nos Opuſcules, pag. 386, ſin. $\lambda(\zeta + \delta)$ étant $=$ ſin. $\lambda\zeta + \lambda\delta$ cof. $\lambda\zeta - \frac{\lambda^2\delta^2}{2}$ ſin. $\lambda\zeta - \frac{\lambda^3\delta^3}{2\cdot 3} \times$ cof. $\lambda\zeta$.

2°. Qu'en comparant les équations ſéculaires de la Terre & de la Lune, produites par les termes indiqués dans l'*art.* 7, §. III, & dans la Remarque (g) qui y répond, le facteur ſin. $\lambda\zeta$ ſera le même pour les deux équations ; car il ſera pour la Terre (*Rem.* g) ſin. $(\pi - \pi')\zeta'$, & pour la Lune ſin. $(\pi - \pi')\, n\zeta =$ ſin. $(\pi - \pi')\zeta'$. C'eſt à quoi il eſt bon de faire attention, pour s'aſſurer pleinement que l'équation ſéculaire de la Lune, dûe à ces ſortes de termes ou à des termes analogues, doit être comme infiniment plus petite, que l'équation ſéculaire correſpondante de la Terre.

Je pourrois donner plus d'étendue à ce Mémoire en comparant avec la nouvelle méthode que je propoſe pour la Théorie de la Lune, celles qui ont été données

juſqu'ici, entr'autres celle qu'on peut voir dans les Tables nouvellement imprimées de M. Mayer, & qui ſont d'ailleurs ſi eſtimables; mais je m'abſtiens de cette comparaiſon, que tout Géometre ſera d'ailleurs en état de faire.

Je me contenterai de dire, qu'il me ſemble que les formules données par M. Mayer d'après la Théorie, ne s'accordent point avec ſes Tables. C'eſt de quoi on peut ſe convaincre, ce me ſemble, en jettant les yeux ſur la formule du lieu de la Lune, page 49 de la Théorie de cet Aſtronome, & en la comparant enſuite avec ſes Tables. Par exemple, lorſque l'élongation $\tilde{\omega}$ de la Lune au Soleil eſt $= 90°$, les Tables de M. Mayer donnent pour équation $1' 57''$, comme ſa formule corrigée. Or, cela poſé, je ne vois point comment il a employé dans ſes Tables l'équation $-21''$ ſin. $(\omega + s)$ qu'il trouve auſſi par la Théorie, & qui répond à celle dont l'argument, ſuivant nos dénominations, eſt $z - nz + \pi nz$. Il en eſt de même de pluſieurs autres équations de la formule de M. Mayer, qu'il ſemble avoir ou négligées entiérement, ou fort changées dans ſes Tables. Mais c'eſt un examen que je laiſſe faire en détail à d'autres Mathématiciens; je le crois d'autant plus néceſſaire que de très-grands Géometres m'ont paru auſſi frappés que moi, du peu d'accord qui ſemble ſe trouver entre les Tables de M. Mayer & ſa Théorie. On peut même obſerver encore que dans les équations que M. Mayer employe pour ſes Tables, les valeurs des coefficiens ne

ſont pas exactement les mêmes que celles qu'il a tirées de la Théorie ; d'où il paroîtroit réſulter que les Tables de M. Mayer ont été dreſſées en partie ſur les obſervations, par une eſpéce de tâtonnement, combiné avec les réſultats principaux que la Théorie fournit.

Pour terminer ces Remarques ſur la Théorie de la Lune, j'ajouterai encore quelques réflexions.

Une des équations les plus difficiles à déterminer dans la Théorie de la Lune eſt celle qui a pour argument $2\zeta - 2p\zeta - 2N\zeta$, ($p\zeta$ étant le mouvement du nœud) par la raiſon que cet argument eſt de l'ordre de $n^2\zeta$, c'eſt-à-dire, très-petit par rapport au mouvement moyen, enſorte que s'il ſe rencontre dans la quantité $\int \pi x^3 d\zeta$, qui ſe trouve dans l'expreſſion du temps, des quantités de la forme $A d\zeta$ ſin. $(2\zeta - 2p\zeta - 2N\zeta)$, ces quantités deviendront (après la double intégration de $d\zeta \int \pi x^3 d\zeta$) de l'ordre de $\frac{A}{n^4}$, c'eſt-à-dire, très-conſidérablement augmentées, & à peu près en raiſon de $(180)^2$ à 1 ; c'eſt-à-dire, de 4×8100 à l'unité. Il en eſt de même des termes qui dans la valeur de π auroient pour argument $2\zeta - 2n\zeta - 2N\zeta + 2\pi n\zeta$, & qui par l'intégration augmentent de même en raiſon de $\frac{1}{n^4}$ à 1 ; ou de $(180)^2$ à 1. Ces termes ayant pour coefficient une quantité de l'ordre de $n^2 P^2 \lambda^2$, P & λ étant les excentricités de l'orbite lunaire, & de l'orbite terreſtre, l'équation réſultante (ſi ces termes ne ſont pas détruits

par d'autres) pourroit être de l'ordre de $\frac{P^2 \lambda^2}{n^2}$, c'eſt-à-dire, de l'ordre de P^3; parce que λ étant égal à $\frac{1}{60}$ à peu près, $\lambda^2 = \frac{1}{3600} = \frac{1}{180 \times 20}$, c'eſt-à-dire, à peu près de l'ordre de $n^2 P$. Il en eſt de même de pluſieurs autres termes de cette eſpéce, qui augmentent beaucoup par l'intégration, ſoit dans l'expreſſion du temps, ſoit dans celle du rayon vecteur; & c'eſt principalement dans l'analyſe de ces termes que conſiſte la grande difficulté d'aſſigner d'une maniere exacte toutes les équations ſenſibles du mouvement moyen de la Lune.

Nous finirons nos Réflexions par obſerver, que quoiqu'il nous paroiſſe plus ſimple de chercher immédiatement le mouvement vrai de la Lune par les mouvemens moyens, comme nous l'avons propoſé dans ce Mémoire; cependant ſi on vouloit chercher d'abord le mouvement moyen par le mouvement vrai, ainſi que nous l'avons fait dans nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, on parviendroit alors à l'équation $Z = z + \varphi z$, entre le mouvement moyen & le mouvement vrai, φz étant une quantité qui n'eſt pas fort grande, & qui, dans ſa plus grande valeur poſſible, ne s'étend pas au-delà de 8 à 9 degrés. Or de cette équation on peut tirer la valeur de z en Z par la méthode qu'a donnée M. de la Grange dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1768, méthode dont on pourra encore abréger

le calcul dans le cas préſent, en ayant égard aux différens ordres de quantités très-pétites que renferme φz, & en négligeant celles qui ſeroient au-deſſus du quatriéme ou du cinquiéme ordre.

ARTICLE II.

Sur la Figure de la Terre.

1. Feu M. Maclaurin eſt le premier qui ait démontré rigoureuſement qu'une maſſe fluide homogene, tournant autour d'elle-même, devoit prendre la figure d'une ellipſe dans l'hypothèſe de l'attraction en raiſon inverſe du quarré des diſtances. Mais perſonne, que je ſache, n'avoit encore remarqué que dans ce cas le problême eſt ſuſceptible de deux ſolutions, c'eſt-à-dire, qu'il y a deux figures poſſibles à donner au ſpheroïde, & dans leſquelles l'équilibre aura lieu. Cette conſidération eſt l'objet des Recherches ſuivantes.

2. Soit une ſphere ſolide & homogene dont le rayon ſoit a, & ſoit c le rapport de la circonférence au rayon, la maſſe de cette ſphere ſera $\frac{2ca^3}{3}$, & ſon attraction ſur un des points de ſa ſurface $= \frac{2ca}{3}$.

3. Suppoſons préſentement que cette ſphere tourne autour d'un de ſes diametres, la force centrifuge à l'équateur pourra être ſuppoſée $= \frac{2ac}{3} \times \omega$, ω étant un nombre connu, qui dépendra de la vîteſſe de rotation.

4. Imaginons enſuite que cette ſphere ſolide & homogene devienne fluide, elle prendra, comme on ſait,

la figure elliptique; ſoit a le demi-axe de cette ellipſe, ma le rayon de l'équateur; l'attraction au pole, que je nomme P, ſera $= \frac{2cm^2a}{(mm-1)^{\frac{1}{2}}} \times \left[mm-1^{\frac{1}{2}} - AT(\sqrt{mm-1}) \right]$; cette expreſſion $AT(\sqrt{mm-1})$ déſigne l'angle dont la tangente eſt $\sqrt{mm-1}$, c'eſt-à-dire, l'arc qui meſure cet angle, diviſé par le rayon. Cette formule ſe trouve démontrée dans l'Ouvrage de M. Maclaurin *ſur le Flux & Reflux de la Mer*, dans la *Théorie de la Figure de la Terre de M. Clairaut*, & dans d'autres Ouvrages, & il eſt facile d'y parvenir par différentes voies.

5. Donc en faiſant $\sqrt{(mm-1)} = k$, on aura l'attraction au pole $= \frac{2ca(kk+1)}{k^3} \times [k - ATk]$.

6. On aura de même l'attraction à l'équateur, que j'appelle $E = ca\left[\frac{(k^2+1)^{\frac{1}{2}}}{k^3} \times ATk - \frac{(k^2+1)^{\frac{1}{2}}}{k^2}\right]$. *Voyez les Ouvrages cités.*

7. Enfin la force centrifuge à l'équateur, que j'appelle F, ſera évidemment $\frac{2ca}{3} \times \omega \times \frac{ma}{a} = \frac{2c\omega a\sqrt{(kk+1)}}{3}$.

8. Or il faut pour l'équilibre, comme M. Maclaurin l'a démontré, & après lui M. Clairaut, que P ſoit à $E - F :: m : 1 :: \sqrt{(kk+1)} . 1$.

9. D'où réſulte la proportion ſuivante $\frac{2\sqrt{(1+kk)}}{k^3} : (k - ATk)$:

$(k - ATk) : \frac{1+kk}{k^3} \times ATk - \frac{1}{k^2} - \frac{2\omega}{3} :: \sqrt{(kk+1)} : 1$. Donc $2k - 2ATk = (1+kk) \times ATk - k - \frac{2\omega k^3}{3}$, équation qui doit ſervir à trouver toutes les valeurs de k qui peuvent réſoudre le problême.

10. On voit d'abord que ſi k a plus d'une valeur réelle & poſitive, le ſecond membre, pour chacune de ces valeurs, ſera toujours poſitif, puiſque $2k - 2ATk$ eſt toujours poſitif, la tangente d'un angle étant toujours plus grande que ce même angle; donc l'attraction à l'équateur $\frac{(1+kk)^{\frac{3}{2}} ca}{k^3} \times ATk - \frac{(k^2+1)^{\frac{1}{2}} ca}{k^2}$ ſera $>$ que la force centrifuge $\frac{2c\omega a\sqrt{(kk+1)}}{3}$ au même équateur; ainſi la Planete ne ſe diſſipera pas, & l'équilibre ſubſiſtera, tant que k aura des valeurs réelles & poſitives, en donnant à m chacune des valeurs repréſentées par $\sqrt{(kk+1)}$.

11. Il n'eſt pas même à craindre que dans l'intérieur du ſphéroïde, l'attraction ſoit moindre à l'équateur que la force centrifuge; car ſoit x la diſtance d'un point quelconque au centre, la gravitation de ce point, ſuppoſé dans l'équateur, ſera $\frac{(E-F)x}{ma}$, & par conſéquent poſitive tant que E ſera $> F$.

12. Il ne s'agit donc plus que d'examiner ſi k a en effet pluſieurs valeurs réelles dans l'équation dont il s'agit.

13. L'équation de l'*art.* 9 donne $\frac{2\omega k^3}{3} = (3+kk) \times (ATk) - 3k$, ou $2\omega = \frac{(3k^2+9)(ATk)-9k}{k^3}$. Or lorſque k eſt ſuppoſée très-petite on a $ATk = k - \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{5}k^5 - \frac{1}{7}k^7$, &c. d'où l'on tire, en ſubſtituant & réduiſant, $2\omega = \frac{4k}{5}$ &c. (tous autres termes contenant des puiſſances de k plus grandes que 2); ce qui fait voir que ω étant ſuppoſé une quantité finie ſi petite qu'on voudra, le premier membre 2ω de l'équation précédente eſt $>$ que le ſecond, ſi $k = 0$ ou même ſi k eſt fort petit.

14. Soit enſuite ſuppoſé $k = \infty$, & par conſéquent $ATk = 90°$. On aura le ſecond membre de l'équation précédente $= \frac{3 \cdot 90°}{k}$ & par conſéquent $= 0$, & plus petit que le premier membre.

15. Donc le premier membre 2ω eſt plus grand que le ſecond, ſoit lorſque $k = 0$, ſoit lorſque $k = \infty$.

16. De-là il eſt aiſé de conclure que ſi la valeur ſuppoſée de 2ω eſt plus petite que la plus grande valeur du ſecond membre de l'équation précédente, il y aura au moins deux valeurs poſſibles de k qui réſoudront le problême; & qu'ainſi dans ce cas le ſphéroïde aura deux états poſſibles d'équilibre.

17. Maintenant pour que la valeur du ſecond membre de l'équation ſoit un *maximum*, il faut que la dif-

férence de $\frac{(k^2+3)(ATk)-3k}{k}$ ſoit $=0$, ou que

$$\frac{k^2+3}{(kk+1)k^3} + ATk\left(-\frac{1}{k^2}-\frac{9}{k^4}\right)+\frac{6}{k^3}=0;$$

ou enfin $ATk = \frac{7kk+9}{k^3} \times \frac{k^4}{(9+k^2)(1+k^2)} = \frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$.

18. Dans cette équation qui donne le *maximum* de l'ordonnée $\frac{(3k^2+9)ATk-9k}{k^3}$, k aura néceſſairement une valeur réelle. En effet, nous avons démontré ci-deſſus qu'en prenant k pour l'abſciſſe de la courbe, l'ordonnée $\frac{(3k^2+9)ATk-9k}{k^3}$ eſt $=\frac{4k^2}{5}$ lorſque k eſt infiniment petit, & $=0$ lorſque $k=\infty$; d'où il eſt clair que la courbe touche l'axe des k à ſon origine, qu'elle a ce même axe pour aſymptote, & que par conſéquent il y a néceſſairement dans cette courbe un point où la tangente eſt parallèle à l'axe, & où l'ordonnée eſt un *maximum*.

19. Cette vérité peut ſe prouver encore de la maniere ſuivante. Lorſque k eſt ſuppoſée fort petite, la valeur de ATk eſt $k-\frac{1}{3}k^3+\frac{k^5}{5}$, &c. & la valeur de $\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$ ou $\frac{7k^3+9k}{9(1+\frac{k^2}{9})(1+k)}$ eſt $=$

$$\left(k+\frac{7k^3}{9}\right)\times(1-k^2+k^4)\times\left(1-\frac{k^2}{9}+\frac{k^4}{81}\right)=$$

(après les réductions) $k - \frac{1}{3}k^3 + \frac{7k^5}{27}$, &c. d'où il eſt clair (à cauſe de $\frac{7}{27} > \frac{1}{5}$) que quand k eſt fort petit, l'ordonnée $\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$ eſt plus grande que l'ordonnée ATk (l'une & l'autre ayant k pour abſciſſe commune). Or quand $k = \infty$, ATk eſt finie & $= 90°$, & $\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$ eſt $= 0$. D'où l'on voit que la courbe dont l'abſciſſe eſt k & l'ordonnée $\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$ eſt d'abord plus écartée de l'axe commun que la courbe dont l'abſciſſe eſt k & l'ordonnée ATk, & qu'enſuite elle en eſt plus proche. Donc la premiere de ces courbes coupe néceſſairement la ſeconde. Donc dans l'équation $ATk = \frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$, k aura du moins une valeur réelle & poſitive.

20. Il réſulte de tout ce que nous avons dit ci-deſſus, 1°. que la courbe dont l'ordonnée eſt $\frac{(3k^2+9)ATk}{k^3} - \frac{9}{k^2}$, & l'abſciſſe k, aura à peu près la forme repréſentée par la Fig. 1, AP étant l'abſciſſe k, & PM l'ordonnée; cette courbe touchera ſon axe en A, & aura ce même axe AO pour aſymptote, & par conſéquent elle aura évidemment un *maximum* en quelque point N; un point d'inflexion en quelqu'autre endroit M avant le point N; & un ſecond en quelqu'endroit B au-delà de N.

21. Quant à la courbe dont l'ordonnée eſt $\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$ l'abſciſſe étant k, elle aura à peu près la forme repréſentée par la Fig. 2, coupant en A ſon axe AP ſous un angle de 45°, & ayant de même l'axe AO pour aſymptote; & comme la premiere valeur de l'ordonnée eſt $k - \frac{1}{3}k^3 + \frac{7k^5}{27}$, &c. il eſt clair que la courbe tombe d'abord au-deſſous de ſa tangente AM, & qu'ainſi elle eſt d'abord concave vers ſon axe. Ainſi elle peut ne point avoir d'inflexion entre ſon origine A & ſon point de *maximum* r, mais elle en aura néceſſairement un en quelque point C placé entre ce point r, & ſon extrémité r' infiniment éloignée.

22. A l'égard de la courbe dont l'abſciſſe eſt k & l'ordonnée ATk, elle aura à peu près la forme repréſentée par la Fig. 3, coupant d'abord ſon axe en A ſous un angle de 45°, tombant enſuite au-deſſous de ſa tangente Am à ſon origine, & ayant pour aſymptote une ligne LZ parallèle à AO, & à la diſtance $AL = 90°$.

23. Il eſt viſible de plus par ce qui a été démontré ci-deſſus, *art.* 19, que cette courbe AnR tombe, près de ſon origine A, au-deſſous de la courbe $A\mu r'$ de la Figure ſeconde, c'eſt-à-dire, plus près de l'axe AO.

24. Quand on aura trouvé chacune des deux valeurs de k (*art.* 16) on remarquera pour déterminer a, que la maſſe du fluide ſuppoſée ſphérique eſt $\frac{2ca^3}{3}$, &

que la masse du sphéroïde elliptique est $\frac{cm^2a^3}{2} \times \frac{2a}{3} \times 2 = \frac{2cm^2a^3}{3} = \frac{2ca^3(k^2+1)}{3}$; par conséquent $a^3 = \frac{a^3}{k^2+1}$ = à très-peu près a^3 si k est fort petit, & $\frac{a^3}{k^2}$ si k est fort grand.

25. De plus, puisque 2ω (*art.* 13) peut être supposé $= \frac{4k^2}{5}$ lorsque 2ω est fort petit, donc $k^2 = \frac{5\omega}{2}$. Or on a dans ce cas $a = \frac{a}{(kk+1)^{\frac{1}{3}}}$; & m ou $\sqrt{(1+kk)} = 1 + \frac{k^2}{2} = 1 + \frac{5\omega}{4}$. Ce qui s'accorde avec ce qu'on sait d'ailleurs, que dans un sphéroïde homogene peu applati $\frac{5\omega}{4}$ est l'excès du rayon de l'equateur sur le demi-axe, ω étant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur.

26. Lorsque 2ω est égal à la plus grande valeur de $\frac{(3k^2+9)ATk - 3k}{k^3}$, alors le problême n'a qu'une solution, les deux valeurs de k devenant égales. Et quand 2ω est plus grand que la plus grande valeur de $\frac{(3k^2+9)ATk - 9k}{k^3}$, le problême est impossible. Or, puisque ATk est $= \frac{7k^2+9k}{(1+k)(9+k^2)}$ lorsque $\frac{(k^2+3)(ATk) - 3k}{k^3}$ a la plus grande valeur, on aura pour la plus grande valeur de $\frac{(3k^2+9)ATk - 9k}{k^3}$

l'expreſſion $\frac{3}{k^3} \times \left[k^2 + 3 \times \frac{7k^3 + 9k}{(1+k^2)(9+k^2)} - 3k\right]$ = (en réduiſant) $\frac{12k^3}{(1+k^2)(9+k^2)}$. Connoiſſant donc k par l'équation $ATk = \frac{7k^3 + 9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$, on aura la plus grande valeur poſſible de $\omega = \frac{6k^2}{(1+k^2)(9+k^2)}$.

27. Soit que le fluide ſoit en équilibre ou non (pourvû que la figure du ſphéroïde ſoit ſuppoſée elliptique), il eſt aiſé de voir que l'excès de la peſanteur de la colomne du pole ſur celle de l'équateur ſera $\frac{Pa}{2} - \frac{(E-F)ma}{2}$; & que par conſéquent la colomne du pole ſera plus forte que celle de l'équateur, ſi $P - m(E-F)$ eſt poſitif, & plus foible s'il eſt négatif. Or $P - m(E-F) =$ (*art.* 5 *& ſuiv.*) $ca(kk+1) \times \left[\frac{2k - 2ATk}{k^3} - \frac{(kk+1)ATk}{k^3} + \frac{1}{k^2} + \frac{2\omega}{3}\right]$; & cette expreſſion qui devient = o lorſque $2\omega = \frac{(3k^2+9)ATk - 9k}{k^3}$ ſera d'abord poſitive quand k ſera fort petite, puiſqu'elle ſera (*art.* 13) à très-peu près = $2\omega - \frac{4k^2}{5}$; elle ſera donc d'abord poſitive, puis = o lorſque k aura ſa premiere valeur répondante à l'équation $2\omega = \frac{(3k^2+9)ATk - 9k}{k^3}$, puis négative, puis redeviendra = o, lorſque k aura ſa ſeconde valeur, après quoi elle redeviendra poſitive.

28. De-là il s'enſuit 1°. que ſi on prend k un peu plus petit que la plus petite de deux racines de l'équation, ou des deux valeurs de k qui donnent l'équilibre, on aura la colomne du pole plus forte que celle de l'équateur. 2°. Que ſi au contraire on prend k un peu plus grand que cette plus petite valeur, la colomne du pole ſera moins forte que celle de l'équateur.

29. Donc le fluide étant en équilibre en vertu de la plus petite valeur de k, ſi on allonge tant ſoit peu le ſphéroïde, la colomne du pole (devenue alors plus longue) l'emportera ſur celle de l'équateur; elle tendra donc à la ſoulever, & par conſéquent l'équilibre tendra à ſe rétablir; & ſi on prend k un peu plus grand que cette plus petite valeur, la colomne du pole, devenue alors plus courte, ſera plus foible que celle de l'équateur; ainſi l'équateur tendra à ſe rabaiſſer, & l'équilibre à ſe rétablir.

30. Au contraire, ſi on prend k tant ſoit peu plus petit que la plus grande des deux valeurs dont il s'agit, la colomne du pole, devenue alors plus longue, ſera plus foible que celle de l'équateur, laquelle tendra par conſéquent à diminuer, & par conſéquent l'équilibre troublé ne ſe rétablira pas. De même ſi on prend k tant ſoit peu plus grand que la plus grande des deux valeurs ſuſdites, la colomne du pole, devenue alors plus courte, ſera la plus forte, & tendra donc à ſe raccourcir encore, ainſi l'équilibre ne ſe rétablira pas.

31. On voit donc que la différence des deux cas d'équilibre

d'équilibre que nous avons trouvés, consiste en ce que dans l'un l'équilibre est *ferme*, & que dans l'autre il ne l'est pas.

32. Si 2ω est égal à la plus grande valeur possible de $\frac{(3k^2+9)ATk-9k}{k^3}$, alors il est aisé de voir que soit qu'on prenne k un peu plus grand ou un peu plus petit que la valeur de k qui donne $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ un *maximum*, la quantité $\frac{2\omega}{3}+\frac{1}{k^2}-\frac{(kk+1)ATk}{k^3}+\frac{2k-2ATk}{k^3}$ ou $P-m(E-F)$ est toujours positive; d'où résulte cette proposition singuliere, que dans le cas présent, si l'on suppose k un peu plus petit que la valeur dont il s'agit, l'équilibre se rétablira de lui-même, & qu'au contraire il ne se rétablira pas si on prend k un peu plus grand; c'est-à-dire, que si dans ce cas on allonge tant soit peu le sphéroïde, il se rétablira, & que si on l'applatit tant soit peu, il ne se rétablira pas.

33. Au reste, que l'équilibre soit *ferme* ou ne le soit pas, les deux cas d'équilibre n'en sont pas moins réels, & n'en donnent pas moins tous deux la Figure de la Terre. Car il n'y a qu'à supposer que le fluide se durcisse, la pesanteur sera également dans les deux cas perpendiculaire à tous les points de la surface, & les corps resteront en repos sur la surface du sphéroïde; condition qui est alors la seule requise pour la Figure de la Terre.

34. Ceci me porteroit à croire, pour le dire en paſſant, que dans les Théories données juſqu'ici ſur la Figure de la Terre, on a peut-être trop cherché à faire accorder entr'eux les deux principes, celui de la perpendicularité de la peſanteur à la ſurface, & celui de l'équilibre des colomnes. Car ce dernier n'eſt néceſſaire que quand la Terre eſt fluide, & n'eſt jamais ſuffiſant, ſoit que la Terre ſoit ſolide ou fluide ; au lieu que le premier eſt néceſſaire dans les deux cas, & ſuffit ſi la Terre eſt ſolide.

35. On peut voir aiſément que plus 2ω ſera petit, plus les deux valeurs de k néceſſaires pour l'équilibre, différeront entr'elles, enſorte que la plus petite ſera d'autant moindre, & la plus grande d'autant plus grande, que 2ω ſera plus petite ; c'eſt ce qu'il eſt facile de démontrer, en imaginant dans la Figure premiere une ligne droite parallèle à AO & à la diſtance 2ω, laquelle coupera évidemment la courbe AMN' en deux points qui donneront les deux valeurs de k, & qui ſeront d'autant plus diſtans l'un de l'autre que la diſtance 2ω de la ſécante à ſa parallèle AO ſera moindre.

36. De-là s'enſuit ce ſingulier paradoxe, que ſi ω eſt très-petit, c'eſt-à-dire, ſi la rotation de la Terre, dans ſon état de ſphéricité primitif, eſt ſuppoſée très-lente, le ſphéroïde peut être ou très-peu applati, ou très-applati, & que dans les deux cas il ſera également en équilibre. On pourroit cependant croire qu'alors quoique ω ſoit très-petit, la rotation à l'équateur pourroit être très-

rápide, dans le ſphéroïde très-applati, parce que le rayon de l'équateur eſt très-grand. Pour nous en aſſurer, voyons la valeur de cette vîteſſe de rotation.

37. Remarquons d'abord que ſi ω eſt ſuppoſé très-petit, ce qui donne la ſeconde valeur de k fort grande, on a pour cette ſeconde valeur $\frac{2\omega}{3} =$ à très-peu près $\frac{ATk}{k}$ ou $\frac{90^\circ}{k}$ ou $\frac{c}{4k}$, d'où $k = \frac{3c}{8\omega}$. La force centrifuge $\frac{2\omega c}{3} \times a\sqrt{(kk+1)}$ eſt donc à peu près $= \frac{2\omega cak}{3}$, & le quarré de la vîteſſe ſous l'équateur $= \frac{2\omega ca^2k^2}{3} =$ (à cauſe de $a^3 = \frac{a^3}{k^2+1}$) $\frac{2\omega c}{3} \times \frac{9cc}{8^2\omega^2} \times \frac{a^2}{k^{\frac{1}{3}}} = \frac{2\omega ca^2}{3} \times \left(\frac{3c}{8\omega}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2a^2c^{\frac{1}{3}}\omega^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}.4}$. Donc le quarré de la vîteſſe à l'équateur du ſphéroïde ſera toujours très-petit; puiſque ω eſt (*hyp.*) très-petit. Ce qui confirmeroit (s'il étoit néceſſaire) ce que nous avons démontré en rigueur & généralement dans l'*art.* 10, que dans aucun cas la Planete ne ſe diſſipera par l'excès de la force centrifuge ſur la peſanteur à l'équateur. Au reſte, dans le cas où ω eſt ſuppoſé très-petit, la force centrifuge à l'équateur du ſphéroïde, quoique toujours très-petite, eſt cependant conſidérablement plus grande que la force centrifuge $\frac{2a^2\omega}{3}$ à l'équateur de la ſphere, par la raiſon que $\omega^{\frac{1}{3}}$ eſt alors conſidérablement plus grand que ω.

38. Comme le problême dont il s'agit dans cet écrit a toujours deux ſolutions quelque petite que ſoit ω, ſolutions dont l'une donne k très-petit & l'autre k très-grand, il paroît d'abord que quand $\omega = 0$, c'eſt-à-dire, quand le fluide ne tourne pas, il y a auſſi deux Figures d'équilibre poſſibles, ſavoir $k = 0$, & $k = \infty$, dont la premiere donne une ſphere, & l'autre un ſphéroïde infiniment applati. Il ſemble en effet que l'équation de l'*art.* 13 ait lieu, en faiſant $k = \infty$, & $\omega = 0$, puiſque les deux membres deviennent $= 0$. Cependant la ſolution ſeroit illuſoire, puiſqu'on auroit pour équation $2\omega k^3 = (3k^2 + 9)ATk - 9k$, dont le premier membre eſt $= 0$, lorſque $\omega = 0$, même en prenant k infini, & dont le ſecond membre eſt infini, en ſuppoſant k infini. Ainſi cette équation qui a lieu tant que ω n'eſt pas abſolument $= 0$, ni $k = \infty$, ceſſe d'avoir lieu quand $\omega = 0$, & $k = \infty$. Il eſt d'ailleurs aiſé de voir que le cas où on auroit $k = \infty$ ſeroit illuſoire, 1°. parce qu'un ſphéroïde infiniment applati, ou réduit à un ſimple cercle, eſt évidemment illuſoire. 2°. Parce que dans ce cas l'attraction au pole eſt exactement & rigoureuſement nulle, au lieu que l'attraction à l'équateur ne le ſeroit pas; & cependant la proportion de l'*art.* 9 ſemble donner en ce cas l'attraction au pole infinie par rapport à l'attraction dans l'équateur, puiſque le rapport des deux attractions eſt $\sqrt{(kk+1)} = \infty$.

39. Si la courbe dont l'ordonnée eſt $\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$

coupoit en plus d'un point la courbe dont l'ordonnée eſt ATk, alors la courbe dont l'ordonnée eſt $\frac{(9+3kk)ATk}{k^3} - \frac{9}{k^2}$, auroit plus d'un point où la tangente ſeroit parallèle à l'axe. Cette circonſtance, que je laiſſe à diſcuter à d'autres Géometres, parce qu'elle entraîneroit dans des calculs plus longs que difficiles, & que d'ailleurs il n'eſt pas trop vraiſemblable qu'elle ait lieu, pourroit mériter d'être examinée. Car comme la courbe dont l'ordonnée eſt $\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}$ eſt d'abord plus éloignée de ſon axe que la courbe dont l'ordonnée eſt ATk, & qu'enſuite cette premiere courbe ſe rapproche de ſon axe à l'infini, il s'enſuit que ſi elle coupoit la ſeconde courbe en plus d'un point, elle la couperoit au moins en trois. Ainſi la courbe dont l'ordonnée eſt $\frac{(9+3kk)ATk-9k}{k^3}$ auroit pour lors au moins trois points où la tangente ſeroit parallèle à l'axe. Elle pourroit donc alors être coupée en quatre points par la parallèle à l'axe menée à la diſtance 2ω, ce qui dépendroit de la valeur qu'on ſuppoſeroit à 2ω; & pour lors k auroit quatre valeurs, dont la premiere ou plus petite donneroit un équilibre ferme, la ſeconde un équilibre non ferme, la troiſiéme un équilibre ferme, la quatriéme un équilibre non ferme. C'eſt ce qu'il eſt aiſé de voir par la Théorie précédente. Mais encore une fois,

il n'eſt guères vraiſemblable que ce cas puiſſe avoir lieu ; ainſi nous ne nous y arrêterons pas.

40. Si dans l'équation du ſphéroïde $2\omega k^3 = (3k^2 + 9)ATk - 9k$, on fait $k = 0$, quel que ſoit ω, on aura $0 = 0$, d'où il paroît s'enſuivre que k peut être $= 0$, & $m = 1$, quelle que ſoit la vîteſſe de rotation, & que par conſéquent une maſſe fluide ſphérique pourroit ſubſiſter en équilibre, avec quelque vîteſſe qu'elle tournât ; ce qui eſt impoſſible. Pour réſoudre ce paradoxe, mettons l'équation ſous la forme ſuivante $2\omega = \frac{(3k^2 + 9)ATk - 9k}{k^3}$; on a vu plus haut que lorſque k eſt ſuppoſé très-petit, le numérateur du ſecond membre eſt $\frac{4k^5}{5}$; donc le ſecond membre eſt $\frac{4k^2}{5}$, d'où il eſt viſible que 2ω ne ſauroit être $= \frac{4k^2}{5}$ lorſque $k = 0$, à moins que ω ne ſoit $= 0$. On voit que la raiſon du paradoxe apparent qui donne $0 = 0$ lorſque $k = 0$, vient de ce que le ſecond membre $= \frac{4k^5}{5} + p$, lorſque k eſt $= 0$ ou infiniment petit, enſorte qu'on a $2\omega k^3 = \frac{4k^5}{5} + p$, p étant une quantité très-petite d'un ordre au-deſſous de k^5. Ainſi la vraie valeur de 2ω eſt réellement $\frac{4k^2}{5}$ à très-peu près, parce que k^3 étant un facteur des deux membres, il faut diviſer les deux membres par k^3 pour avoir la valeur de 2ω. En général ſi

on a $x = y^m$, on aura $xy^k = y^{m+k}$, & il paroît d'abord par cette derniere équation que y étant $= o$, les deux membres doivent être zéro, & que x eſt égal à tout ce qu'on voudra, quoique x ſoit réellement $= y^m$, & par conſéquent $= o$ quand $y = o$. J'ai cru devoir faire cette remarque, parce qu'elle peut être utile en d'autres occaſions.

41. Suppoſons, pour généraliſer les Recherches précédentes, que la maſſe de la Terre attire non-ſeulement en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, mais encore en raiſon directe de la diſtance même; l'attraction au point M, Fig. 4, ſuivant MO, ſera augmentée de $\frac{2cm^2a^3}{3C^3} \times x$, en nommant MO ou CN, x, & C une conſtante donnée, qui dépend de l'intenſité de la nouvelle attraction. On trouvera de même que l'attraction au point M ſuivant MN ſera augmentée de $\frac{2cm^2a^3}{3} \times y$, en nommant MN, y; de plus l'attraction en M ſuivant MO & ſuivant MN, dans l'hypothèſe de la raiſon inverſe du quarré des diſtances eſt $= \frac{(E-F)x}{a\sqrt{(kk+1)}} = \frac{(E-F)x}{ma}$, & $\frac{Py}{a}$.

42. Suppoſons encore, pour plus de généralité, qu'un corps S dont la maſſe ſoit $= \frac{2cA^3}{3}$, placé dans l'axe CP, à la diſtance $SC = C'$ (très-grande par rapport à CP), & agiſſant à-la-fois en raiſon inverſe du

quarré des distances, & en raison directe de la distance, attire la masse du sphéroïde, il en résultera 1°. une force suivant $MC = \frac{2cA^3}{3C'^3} \times MC + \frac{2cA^3 \cdot MC}{3C^3}$;
2°. une force suivant $MN = \frac{2cA^3}{3} \times \left(\frac{y}{C'^3} + \frac{y}{C^3}\right)$;
3°. une force suivant $MO = \frac{2cA^3}{3} \times \left(\frac{x}{C'^3} + \frac{x}{C^3}\right)$:
4°. Enfin, une force suivant $MZ =$ à très-peu près $\frac{2cA^3}{3C'^2} \times \frac{3y}{C'}$. Cette dernière force vient de l'attraction en raison inverse du quarré des distances. L'autre attraction n'en produit ici aucune, parce que l'attraction en M suivant MZ est dans ce cas égale à l'attraction du centre C.

43. On aura donc la proportion suivante, nécessaire pour l'équilibre, $\frac{Py}{a} + \frac{2cA^3y}{3C'^3} + \frac{2cA^3y}{3C^3} + \frac{2cm^2a^3y}{3C^3} - \frac{2cA^3y}{C'^3} : \frac{(E-F)x}{ma} - \frac{2c\omega x}{3} + \frac{2cA^3x}{3C'^3} + \frac{2cA^3x}{3C^3} + \frac{2cm^2a^3x}{3C^3} :: y : \frac{x}{m^2} :: m^2y : x$.

44. D'où l'on tire l'équation $\frac{2(kk+1)}{k^3} \times [k - A\dot{T}k] + \frac{2A^3}{3C'^3} + \frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2A^3}{C'^3} + \frac{2a^3(kk+1)}{3C^3} = \frac{(k^2+1)^2 A\dot{T}k}{k^3} - \frac{k^2+1}{k^2} - \frac{2\omega(k^2+1)}{3} + \left[\frac{2A^3}{3C'^3} + \frac{2A^3}{3C^3} + \frac{2a^3(kk+1)}{3C^3}\right] \times (kk+1)$.

45.

45. On aura donc $\frac{2\omega}{3} = \frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} + \frac{2A^3 + 2a^3(kk+1)}{3C^3} \times \left[1 - \frac{1}{kk+1}\right] + \frac{2A^3}{3C^3} \times \left[1 + \frac{2}{kk+1}\right]$; équation dans laquelle on peut mettre encore au lieu de a^3 sa valeur $\frac{a^3}{kk+1}$ (*art.* 24); ce qui la rendra plus simple.

46. Si k est $= 0$ ou infiniment petit, le second membre se réduit à $\frac{2A^3}{C^3}$; & si $k = \infty$, le second membre devient $\frac{c}{4k} + \frac{2a^3}{3C^3} + \frac{2A^3}{3C^3} + \frac{2A^3}{3C^3} = \frac{2a^3}{3C^3} + \frac{2A^3}{3C^3} + \frac{2A^3}{3C^3}$; d'où il est aisé de conclure, 1°. que si $\frac{2\omega}{3}$ est $< \frac{2A^3}{3C^3} + \frac{2a^3}{3C^3} + \frac{2A^3}{3C^3}$, il y aura une valeur possible de k; 2°. que si en général $\frac{2\omega}{3}$ est plus petit que la plus grande valeur du second membre de l'équation de l'*art.* 45, on aura deux valeurs possibles de k toutes deux réelles & positives; mais ces deux valeurs n'auront lieu que dans le cas où la valeur du second membre de l'équation dont il s'agit, aura réellement un *maximum*.

47. Ce second membre égalé à un *maximum*, donnera $\frac{k^2+3}{(kk+1)k^3} + ATk \times \left(\frac{-9-k^2}{k^4}\right) + \frac{6}{k^3} +$

$\left(\frac{2a^3}{3C^3}+\frac{2A^3}{3C^3}\right)\times\frac{2kdk}{(kk+1)^2}+\frac{4A^3}{3C^3}\times-\frac{2kdk}{(kk+1)^2}=0$;

d'où l'on tire $ATk=\frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}+\left(\frac{2a^3}{3C^3}+\frac{2A^3}{3C^3}-\frac{4A^3}{3C^3}\right)\times\frac{2k^5}{(9+k^2)(kk+1)^2}$.

48. Lorſque k eſt infiniment petit, le ſecond membre devient (*art.* 19) $k-\frac{1}{3}k^3+\frac{7k^5}{27}+\left(\frac{2a^3}{3C^3}+\frac{2A^3}{3C^3}-\frac{4A^3}{3C^3}\right)\times\frac{2k^5}{9}$; & lorſque k eſt infini, le ſecond membre devient $\frac{7}{k}+\left(\frac{2a^3}{3C^3}+\frac{2A^3}{3C^3}-\frac{4A^3}{3C^3}\right)\times\frac{2}{k}$, c'eſt-à-dire, infiniment petit. Donc ce ſecond membre eſt $=0$ lorſque $k=0$, & lorſque $k=\infty$; or la valeur de ATk, lorſque k eſt infiniment petit, eſt $k-\frac{1}{3}k^3+\frac{1}{5}k^5$, &c. $<k-\frac{1}{3}k^3+\frac{7k^5}{27}$, &c. & lorſque k eſt infinie, elle eſt $=\frac{c}{4}$ ou 90°, c. à. d. finie. Donc ſi $\frac{2a^3}{3C^3}+\frac{2A^3}{3C^3}-\frac{4A^3}{3C^3}$ eſt ſuppoſé poſitif, ou même négatif, mais tel que $\frac{7}{27}+\frac{4a^3}{9\cdot3C^3}+\frac{4A^3}{9\cdot3C^3}-\frac{8A^3}{9\cdot3C^3}$ ſoit $>\frac{1}{5}$, la courbe dont l'ordonnée eſt ATk ſe trouvera d'abord plus près de l'axe que l'autre courbe, & enſuite plus loin. Donc elle la coupera néceſ-

fairement en quelque point ; donc ce point donnera le *maximum* qu'on cherche, & par conſéquent deux valeurs de *k*.

Nous donnerons dans les trois Mémoires ſuivans beaucoup d'autres Recherches nouvelles ſur la matiere qui a fait l'objet de cet article.

ARTICLE III.

Eclairciſſemens ſur deux endroits de mes Ouvrages, qui ont rapport à la Figure de la Terre.

1. FEU M. Clairaut avoit avancé dans ſa *Théorie de la Figure de la Terre*, p. 225, que ſi la Terre étoit formée d'un noyau ſolide recouvert d'une lame de fluide très-mince, la Figure extérieure de la Terre pouvoit être allongée, en ſuppoſant que le noyau intérieur le fût auſſi (*a*).

2. Dans mes *Recherches ſur la cauſe générale des Vents*, pag. 42, j'ai prouvé de plus que le noyau intérieur pouvoit être applati, & le ſphéroïde extérieur allongé.

3. En effet, ſoit comme je l'ai ſuppoſé dans l'endroit cité, α' l'excès du demi-diametre de l'équateur du noyau ſur ſon demi-axe, Δ la denſité du noyau, δ celle du fluide, r le demi-axe du ſphéroïde, $r + \alpha$ le demi-diametre de ſon équateur, $\frac{q}{p}$ le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur, on aura, ainſi que je l'ai fait voir, $\alpha = \frac{\frac{qr}{2p} + \frac{3\alpha'}{5}\frac{(\Delta-\delta)}{\Delta}}{1 - \frac{3\delta}{5\Delta}}$, ou (en

(*a*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

ſuppoſant $5\Delta = 3\delta - f$) $\alpha = \frac{\frac{qr}{2p} - \frac{\alpha'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)}{-\frac{f}{5\Delta}}$,

autre formule qui ſe trouve dans le premier Volume de mes *Opuſcules*, pag. 250.

4. Maintenant j'ai remarqué dans l'endroit cité de mes *Réflexions ſur les Vents*, que ſi f eſt poſitif, c'eſt-à-dire, ſi 5Δ eſt $< 3\delta$, α pourra être négatif, quoique α' ſoit poſitif, pourvû que $\frac{qr}{2p} - \frac{\alpha'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)$ ſoit poſitif, c'eſt-à-dire, pourvû que la viteſſe de rotation imprimée à la Terre ſoit ſuppoſée telle que $\frac{qr}{2p}$ ſoit $> \frac{\alpha'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)$, condition évidemment poſſible (*b*).

5. Sur quoi il faut bien remarquer que dans l'endroit cité je n'ai point du tout donné ce cas de f poſitif & de $\frac{qr}{2p} > \frac{\alpha'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)$, comme *le ſeul cas* où il y eût équilibre, le noyau intérieur étant applati; je l'ai donné ſeulement pour *un cas* où il y auroit équilibre, & comme un exemple qui prouvoit que l'allongement du noyau intérieur n'étoit pas néceſſaire. C'eſt tout ce que je me propoſois de faire *en paſſant* dans cet endroit de mon Ouvrage ſur les Vents, où la Théorie de la Figure de la Terre n'étoit pas mon objet direct.

6. Il étoit aiſé à des Lecteurs tant ſoit peu intelligens, de ſuppléer au reſte, & de conclure de la même

(*b*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

formule de l'*art.* 3 ci-deſſus, que f étant négatif, c'eſt-à-dire, 5Δ étant ſuppoſé $> 3\delta$, α pourroit encore être négatif, quoique α' fût poſitif. En effet, ſoit $5\Delta = 3\delta + f$, on aura $\alpha = \frac{\frac{\varphi r}{2p} - \frac{\alpha'}{5}\left(2 - \frac{f}{\Delta}\right)}{\frac{f}{5\Delta}}$; or α' étant ſuppoſé poſitif, c'eſt-à-dire, le noyau intérieur applati, cette quantité ou valeur de α eſt évidemment négative ſi $\frac{\varphi r}{2p}$ eſt $< \frac{\alpha'}{5}\left(2 - \frac{f}{\Delta}\right)$; condition qui eſt encore évidemment poſſible. Car ſoit, par exemple, dans le cas le plus ſimple $\varphi = 0$, c'eſt-à-dire, le fluide en repos, & $f < 2\Delta$, c'eſt-à-dire, $f = 2\Delta - \omega$, ou ce qui revient au même, $3\Delta = 3\delta - \omega$, ω étant ſuppoſé $< 3\delta$; il eſt très-clair que $\frac{\varphi r}{2p}$ ſera $< \frac{\alpha'}{5}\left(2 - \frac{f}{\Delta}\right)$; & en général pourvû que f ſoit $< 2\Delta$ (*c*), il ſera évidemment toujours poſſible de donner une telle vîteſſe de rotation à la Terre que $\frac{\varphi r}{2p}$ ſoit $< \frac{\alpha'}{5}\left(2 - \frac{f}{\Delta}\right)$ (*d*).

7. Il eſt donc très-conſtant & très-clair par nos formules, que α' étant ſuppoſé poſitif, & $5\Delta > 3\delta$, il peut y avoir équilibre, quoique α ſoit négatif. J'avoue que je n'ai fait mention expreſſe de ce dernier cas dans aucun des deux Ouvrages cités; mais encore une fois,

(*c*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.
(*d*) Voyez *ibid.*

j'ai cru pouvoir m'en rapporter là-deſſus à l'intelligence des Lecteurs tant ſoit peu Géometres.

8. J'ai démontré de plus dans l'endroit cité de mes *Opuſcules Mathématiques* (Tom. 1, pag. 246 — 252) que 5Δ étant ſuppoſé $> 3\delta$, l'équilibre dérangé ſe rétabliroit de lui-même; & qu'ainſi dans le cas de l'article précédent, l'équilibre étoit non-ſeulement *réel*, mais encore, comme s'expriment les Géometres, un équilibre *ferme*, quoique le noyau intérieur fût applati, & le ſphéroïde extérieur allongé.

9. J'avois démontré cette propoſition, parce qu'un habile Mathématicien avoit prétendu contre moi que l'explication propoſée par M. Clairaut, de l'allongement du ſphéroïde, étoit la ſeule admiſſible, attendu que ſi le noyau intérieur étoit applati, & le ſphéroïde extérieur allongé, il pourroit bien à la vérité y avoir équilibre dans certains cas, mais que l'équilibre ne ſeroit pas *ferme*.

10. Sur quoi je remarquerai d'abord que dans tout l'Ouvrage de M. Clairaut, il n'étoit pas queſtion d'examiner les cas dans leſquels l'équilibre étoit *ferme* ou ne l'étoit pas, ce ſavant Géometre n'ayant fait mention de cette condition en aucun endroit; il s'agiſſoit ſeulement d'examiner les cas où l'équilibre pouvoit avoir lieu réellement & dans la ſimple rigueur mathématique. Ainſi, quant à ce qui regarde M. Clairaut, l'extenſion importante que j'avois donnée à ſon explication trop limitée, étoit rigoureuſement exacte, puiſqu'il n'étoit

pas juſte d'y faire entrer une condition que ce Savant n'avoit pas exigée, & à laquelle même, ſelon toute apparence, il n'avoit pas penſé.

11. On a prétendu depuis que cette condition de la *fermeté de l'équilibre* étoit néceſſaire; je n'examine pas en ce moment ſi cette condition doit être regardée comme néceſſaire, phyſiquement parlant : j'en dirai deux mots plus bas, *art.* 17; mais il eſt du moins certain qu'elle n'eſt pas *mathématiquement* indiſpenſable : & encore une fois, il ne s'agiſſoit entre M. Clairaut & moi que du cas d'un équilibre mathématiquement poſſible.

12. Mais il y a plus. Il eſt évident, ce me ſemble, par les *art.* 7 & 8 ci-deſſus, contre l'aſſertion du Géometre dont il s'agit, que ſi $5\,\mathbb{A}$ eſt $> 3\,\mathbb{B}$, 1°. il pourra y avoir équilibre quoique le noyau intérieur ſoit applati, & le ſphéroïde extérieur allongé; 2°. que dans ce cas l'équilibre ſera *ferme*, & ſe rétablira de lui-même s'il eſt dérangé. Mon ſavant Adverſaire n'avoit juſqu'ici rien répondu à ma démonſtration, ſoit qu'elle lui parût convaincante, ſoit peut-être qu'il n'y crût voir qu'un paralogiſme (*e*).

13. Mais un Mathématicien anonyme qui vient de traduire en françois l'Ouvrage latin du P. Boſcovich ſur la *Figure de la Terre*, a inſéré à la page 449 de ſa Traduction une longue Note, qui n'a peut-être pas été communiquée à l'Auteur, & dans laquelle il eſſaye de faire revivre l'aſſertion que j'avois réfutée.

(*e*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

14. Il croit y avoir réuſſi en rapprochant l'un de l'autre les deux endroits cités, l'un de mes *Reflexions ſur la cauſe des Vents*, pag. 42, l'autre de mes *Opuſcules Mathématiques*, pag. 246 & ſuivantes. Par le premier, j'avance & je prouve que ſi 5Δ eſt $< 3\mathfrak{d}$, il pourra y avoir équilibre, quoique le noyau intérieur ſoit applati, & le ſphéroïde extérieur allongé; par le ſecond, j'avance & je prouve que l'équilibre ne ſera pas ferme ſi 5Δ eſt $< 3\mathfrak{d}$. Donc, conclut le Traducteur, quoiqu'il puiſſe y avoir équilibre ſi 5Δ eſt $< 3\mathfrak{d}$, cependant cet équilibre ne ſera pas *ferme*, & par conſéquent *M. d'Alembert n'a nullement prouvé ce qu'il ſe propoſoit* (*f*).

15. Cette conſéquence ſeroit juſte, ſi j'avois dit que le noyau intérieur étant applati, & le ſphéroïde extérieur allongé, *il ne pourroit y avoir d'équilibre que* dans le cas de $5\Delta < 3\mathfrak{d}$. Mais, comme je le viens d'obſerver plus haut (*art.* 5), je n'ai point du tout donné cette condition de $5\Delta < 3\mathfrak{d}$, comme *abſolument néceſſaire* pour l'équilibre; & je viens de faire voir évidemment (*art.* 6 ci-deſſus) que 5Δ étant ſuppoſé $> 3\mathfrak{d}$, il pouvoit encore y avoir équilibre, quoique le noyau intérieur fût *applati*, & le ſphéroïde extérieur *allongé*. Le Traducteur a ſuppoſé fauſſement dans ſa Note, non-ſeulement que j'*avois cru* l'équilibre poſſible dans le ſeul cas de $5\Delta < 3\mathfrak{d}$, mais encore que l'équilibre n'étoit poſſible que dans ce ſeul

(*f*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

cas (*g*) ; ainſi il s'eſt trompé doublement à cet égard ; & dans *le fait* & dans *le droit*. Tout ce que j'ai avancé à ce ſujet eſt donc très-exact, & la longue Note du Traducteur contre moi tombe d'elle-même.

16. Au reſte, il y a long-temps, quoique le Traducteur ſemble avancer le contraire, que les Géometres ont diſtingué en général dans les corps deux états d'équilibre, l'un *ferme*, l'autre qui ne l'eſt pas. M. Daniel Bernoulli avoit diſtingué ces deux états dans le Tome X des Anciens Mémoires de Pétersbourg (imprimés en 1747), p. 148, à l'occaſion des oſcillations des corps flottans ; & il ne paroît pas même donner cette remarque pour nouvelle.

17. J'ajoute que la condition de la *fermeté* ou *non fermeté* de l'équilibre, n'eſt pas à beaucoup près auſſi néceſſaire dans le cas de la Figure de la Terre, que dans celui de l'équilibre des corps flottans. Il eſt bien vrai que dans l'hypothèſe de la Terre fluide, l'équilibre *troublé* ne ſe rétablira pas, ſi cet équilibre n'eſt pas ferme ; mais qu'on ſuppoſe la Terre ſolide, alors dans tous les cas qui donnent l'équilibre ferme ou non, les corps reſteront en repos ſur la ſurface de la Terre (*art. 33 & 34 de l'article précédent*) ; & aucun des cas d'équilibre n'a pour lors ni mathématiquement, ni même phyſiquement parlant, aucun avantage ſur un autre ; raiſon qui ſemble avoir diſpenſé les Mathématiciens d'examiner particuliérement les cas où l'équilibre étoit ferme.

(*g*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

18. Il n'y a pas plus d'exactitude dans ce que le Traducteur ajoute, que M. Clairaut avoit donné *avant moi, & avant le P. Boscovich*, dont l'Ouvrage eſt fort poſtérieur au mien, la formule de la Figure de la Terre dans le cas d'un noyau intérieur recouvert d'un fluide très-mince (*h*). Car la formule que M. Clairaut donne pour cet objet, p. 226 de ſon Livre, n'eſt point exacte, cet habile Géometre y ſuppoſant fauſſement (voy. pag. 225) que dans ce cas l'ellipticité du noyau & celle du fluide ſeront égales, ce qui n'eſt pas. La formule que donne M. Clairaut, pag. 226, eſt $10 A\delta - 2D = 5 A\varphi$; de-là, en ſuivant ſa ſuppoſition des deux ellipticités égales, & ſubſtituant nos dénominations aux ſiennes, on tirera $\frac{10\Delta\alpha}{3} - 2\Delta\alpha = \frac{5\Delta\varphi'}{3}$, φ' étant le rapport de la force centrifuge à la peſanteur ſous l'équateur; d'où réſulte $\alpha = \frac{5\varphi'}{4}$, formule illuſoire dans le cas préſent, puiſqu'elle ne donne que la figure d'un ſphéroïde homogene, & que la différence des denſités du fluide & du noyau n'y paroît pas; & quand même au lieu de faire en cet endroit avec M. Clairaut $D = \alpha\Delta$, on feroit, ſuivant la valeur générale qu'il aſſigne à D (pag. 219), $D = \alpha'\Delta$, on auroit, d'après ſa formule $10 A\delta - D = 5 A\varphi$, l'équation $\frac{10\Delta\alpha}{3} - 2\alpha'\Delta = \frac{5\Delta\varphi'}{3}$; d'où l'on tireroit $\alpha = \frac{5\varphi' + 6\alpha'}{10}$;

(*h*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

valeur qui n'eſt pas encore réellement celle de a, puiſque les deux denſités n'y entrent pas (*i*).

Il eſt, ce me ſemble, auſſi ſingulier que malheureux pour le Traducteur du P. Boſcovich, de s'être trompé ſur tous les points dans les objections qu'il a jugé à propos de me faire.

(*i*) Voyez les Remarques à la fin de cet article.

REMARQUES
SUR L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

(*a*) *Art.* 1. M. Clairaut ne dit pas expreſſément qu'on *ne puiſſe* expliquer l'allongement du ſphéroïde extérieur *que* par l'allongement du noyau. Cependant il y a lieu de croire qu'il le penſoit, ou qu'il étoit du moins porté à le penſer, comme on le verra plus bas, note premiere ſur l'*art.* 6.

(*b*) *Art.* 4. Soit g la viteſſe ſous l'équateur, on aura $gg = \varphi r$, & par conſéquent il faut pour remplir la condition dont il s'agit que g ſoit $> \sqrt{\left[2p \times \frac{a'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)\right]}$, c'eſt-à-dire, que la viteſſe g ſoit plus grande que celle qu'un corps peſant acquerroit en tombant de la hauteur $\frac{a'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)$.

(*c*) *Art.* 6. Si Δ eſt $> \delta$, c'eſt-à-dire, ſi la denſité du noyau eſt plus grande que celle du fluide, alors faiſant $\delta = \Delta - k$, l'équation $5\Delta = 3\delta + f$, donnera $2\Delta = f - 3k$, k étant un nombre poſitif; d'où

$f > 2\Delta$. Donc ſi Δ eſt $> \delta$, on ne peut expliquer l'allongement du ſphéroïde que par celui du noyau. Or M. Clairaut ſemble ſuppoſer dans ſon Ouvrage, pages 252, 280, 291, 294, que les parties les plus denſes doivent toujours être plus près du centre, ou du moins que cette ſuppoſition eſt indiſpenſable quand le noyau eſt fluide, & plus naturelle quand il eſt ſolide. Il y a donc lieu de croire qu'il penſoit que α ne pouvoit être négatif, à moins que α' ne fût auſſi négatif. Mais cette hypothèſe, que les parties les plus denſes ſoient plus voiſines du centre, n'eſt nullement néceſſaire, même ſi le noyau intérieur eſt fluide, & encore moins s'il eſt ſolide. Auſſi M. Clairaut ſemble-t-il ailleurs ne pas exiger indiſpenſablement cette condition pour un noyau ſolide; car il demande ſimplement, pag. 220, que la denſité du noyau ne ſoit pas exprimée par une quantité négative, ce qui en effet ſeroit abſurde. M. Clairaut ſe ſert même de l'hypothèſe que le noyau intérieur ſoit moins denſe que la Planete, pour expliquer certaines ſuppoſitions qu'on peut faire ſur la figure du ſphéroïde. Parmi ces ſuppoſitions, il en eſt une (pag. 221) qui exige que la Planete ſoit creuſe intérieurement, la denſité Δ du noyau étant alors $= 0$. Cette ſuppoſition ne peut avoir lieu dans l'hypothèſe que la Planete ſoit fluide, car alors la matiere retomberoit au centre; il eſt donc néceſſaire alors que la Planete extérieure ſoit ſolide.

On peut à cette occaſion remarquer, paſſant,

que si la figure du noyau est semblable à celle de la Planete, l'applatissement de l'un & de l'autre sera sensiblement le même que dans le cas de l'homogénéité. Car soit $\alpha' = \alpha$, l'équation $\alpha = \frac{\frac{qr}{2p} - \frac{\alpha'}{5}\left(2 + \frac{f}{\Delta}\right)}{-\frac{f}{5\Delta}}$ deviendra $\frac{qr}{2p} - \frac{2\alpha}{5} = 0$ ou $\alpha = \frac{5qr}{4p}$.

(*d*) *Art.* 6. Il suffit pour cela que la vîtesse de rotation à l'équateur soit $<$ que la vîtesse qu'acquerroit un corps pesant en tombant de la hauteur $\frac{\alpha'}{5}\left(2 - \frac{f}{\Delta}\right)$.

(*e*) *Art.* 12. Si le noyau intérieur est sphérique, la condition de l'équilibre *ferme* demande que 5Δ soit $> 3\delta$, & $5\Delta > 3\delta$ donne le sphéroïde extérieur *applati*. Ainsi dans ce cas la condition de l'*allongement* du sphéroïde extérieur & de l'équilibre *ferme* ne peuvent subsister ensemble. Mais il n'en sera pas de même si on suppose le noyau intérieur *applati* & non pas sphérique. Voyez l'*art.* 6 ci-dessus.

(*f*) *Art.* 14. Selon le Traducteur, pag. 452 & 453; *si* 5Δ *est* $> 3\delta$, *le rapport de l'axe au diametre de l'équateur est* PLUS PETIT *dans le fluide que dans le noyau*, ce qui n'est pas vrai; car soit $5\Delta = 3\delta + f$, on a $\alpha = \frac{\frac{qr}{2p} - \frac{\alpha'}{5}\left(2 - \frac{f}{\Delta}\right)}{\frac{f}{\Delta}}$; d'où il est clair que α

peut être plus petit que α' si $\frac{\phi r}{2p}$ est $< \frac{2\alpha'}{5}$. Ce qui arrivera évidemment si on a $\frac{\phi r}{2p} < \frac{\alpha'}{5}\left(2 - \frac{f}{\Delta}\right)$; c'est-à-dire, si le sphéroïde est allongé. Donc dans ce cas de $\frac{\phi r}{2p} < \frac{2\alpha'}{5}$, qui est évidemment possible, le rapport du diametre de l'équateur à l'axe sera PLUS PETIT, & le rapport de l'axe au diametre de l'équateur PLUS GRAND dans le fluide que dans le noyau, α' étant supposé positif.

Quoique je croye avoir pleinement satisfait aux objections du Traducteur du P. Boscovich, contre la proposition que j'ai avancée sur l'allongement du sphéroïde; cependant je crois devoir encore répondre ici à une difficulté qui peut se présenter assez naturellement. Il résulte, dira-t-on, de ma Théorie, que si $3\mathfrak{d}$ est $< 5\Delta$ & que le noyau intérieur soit sphérique, le sphéroïde ne peut être allongé; or il semble s'ensuivre de-là, & le Traducteur l'avance en effet formellement, p. 453, qu'à *plus forte raison* si le noyau intérieur est applati, le sphéroïde ne peut être allongé: car il semble que l'applatissement du noyau tende à applatir encore davantage le sphéroïde, que dans le cas où le noyau est sphérique.

Mais il est bien aisé de résoudre cette difficulté en considérant, que si le noyau intérieur est moins dense que le fluide, c'est-à-dire, si Δ est $< \mathfrak{d}$, l'applatissement supposé du noyau tendra à allonger le sphéroïde; par

la

la raiſon qu'il en réſultera ; comme il eſt aiſé de le voir, que la force perpendiculaire au rayon, qui dans le cas du noyau ſphérique étoit $\alpha \mathfrak{C} \mathfrak{d}$ ($\mathfrak{C}$ étant dépendante de la poſition du rayon, & α l'ellipticité du ſphéroïde) ſera, dans le cas d'un noyau applati de l'ellipticité α', $\alpha \mathfrak{C} \mathfrak{d} + \alpha' \mathfrak{C} (\Delta - \mathfrak{d})$. Or ſi Δ eſt $< \mathfrak{d}$, cette quantité eſt $< \alpha \mathfrak{C} \mathfrak{d}$; & par conſéquent ſi Δ eſt $< \mathfrak{d}$ & α' poſitif, il eſt viſible que la force $\alpha' \mathfrak{C} (\Delta - \mathfrak{d})$ eſt négative, & qu'ainſi le noyau elliptique, ſuppoſé applati, tend à allonger le ſphéroïde. Or c'eſt préciſément ce qui arrive dans le cas de $5\Delta > 3\mathfrak{d}$ & de $2\Delta > 5\Delta - 3\mathfrak{d}$ ou $2\Delta > f$; car on aura $3\mathfrak{d} > 3\Delta$ & $\Delta < \mathfrak{d}$.

Il eſt à remarquer que les conditions de $5\Delta > 3\mathfrak{d}$ & $2\Delta > f$ ou $2\Delta > 5\Delta - 3\mathfrak{d}$ s'accordent très-bien enſemble, & qu'ainſi la premiere n'exclut nullement la ſeconde.

Il eſt à remarquer encore que ſi α' eſt négatif, c'eſt-à-dire, ſi le noyau eſt allongé, toujours dans la même hypothèſe de $5\Delta > 3\mathfrak{d}$ & de $2\Delta > 5\Delta - 3\mathfrak{d}$, α ſera poſitif, c'eſt-à-dire, le ſphéroïde applati. Ainſi dans cette hypothèſe de $5\Delta > 3\mathfrak{d}$ & de $2\Delta > 5\Delta - 3\mathfrak{d}$, le noyau *allongé* donne toujours le ſphéroïde *applati* & l'équilibre ferme ; & au contraire le noyau applati peut donner le ſphéroïde allongé, mais toujours l'équilibre ferme. Ce qui confirme de nouveau ce que j'ai avancé dans le Tome I de mes *Opuſcules Mathématiques*, pag. 251, que ce n'eſt point la figure du noyau,

mais le rapport entre 5Δ & 3δ qui rend l'équilibre ferme ou non.

(*g*) *Art.* 15. *Sans l'allongement du noyau*, dit le Traducteur, pag. 453, le fluide *allongé ne ſera point* en équilibre, *à moins* que le rapport des denſités ne ſoit moindre que $\frac{1}{5}$. Voilà ce qui eſt faux, & que je n'ai point dit.

(*h*) *Art.* 18. Je dois ajouter ici que *le P. Boſcovich* n'a donné dans ſon Ouvrage (par la méthode qui lui eſt particuliere) la valeur de α que dans l'hypothèſe de $\alpha' = 0$, ou du noyau intérieur ſphérique, & que pour le cas où α' n'eſt pas $= 0$, il a recours aux formules de M. Clairaut. V. l'Ouvrage du P. Boſcovich, art. 199 & 215, p. 441 & 449 de la Traduction. La Théorie du P. Boſcovich ne donne donc qu'un cas particulier; je n'examine pas ſi elle eſt plus ſimple que la mienne, comme le prétend le Traducteur; ce qui eſt indifférent en ſoi, & d'ailleurs ſeroit peu ſurprenant, puiſque le P. Boſcovich ſe borne à un cas plus limité.

(*i*) *Art.* 18. Il eſt pourtant vrai que ſi dans la formule générale donnée par M. Clairaut, pag. 217, on ne ſuppoſe pas, comme il l'a cru fauſſement, les deux ellipticités égales, on retombera dans une formule exacte, & conforme à celle que nous avons donnée plus haut, $\alpha = \frac{\frac{9r}{2p} + \frac{3\alpha'}{5}\left(\frac{\Delta - \delta}{\Delta}\right)}{1 - \frac{3\delta}{5\Delta}}$; mais il n'eſt pas moins

vrai que M. Clairaut n'a pas donné cette formule pour le cas dont il s'agit, & qu'il y en a ſubſtitué une très-fautive, quoique déduite de ſa formule générale.

P. S. *Du 15 Octobre* 1771. Long-temps après avoir fini cet écrit, je reçois une Lettre d'un des plus grands Géometres de l'Europe, en date du 30 Septembre 1771, & voici ce qu'il me mande à l'occaſion de la Note que je viens de réfuter.

« Je crois que vous n'avez pas eu de peine à répon-
» dre à l'Auteur de la Note, pag. 450. Son paralo-
» giſme conſiſte, ſuivant moi, dans l'argumentation *a*
» *minori ad majus* qu'il emploie, pag. 453; car il n'a
» pas obſervé que l'expreſſion générale de l'ellipticité
» $\frac{6f\alpha'+5(f+1)\phi}{2(5f+2)}$, ne peut à la vérité devenir né-
» gative lorſque $\alpha'=0$, tant que le dénominateur eſt
» poſitif, condition néceſſaire pour le rétabliſſement de
» l'équilibre, mais qu'elle peut très-bien le devenir quand
» α' n'eſt pas nul; car prenant f négatif & $=-g$,
» il ſuffira que $g<\frac{2}{5}$ & $>\frac{5\phi}{5\phi+6\alpha'}=\frac{1}{1+\frac{6\alpha'}{5\phi}}$;
» de ſorte qu'il n'y aura qu'à prendre α' enſorte que
» $\frac{1}{2}>1+\frac{6\alpha'}{5\phi}$, ou bien $\alpha'<\frac{5\phi}{4}$; d'où l'on voit
» que α' peut être auſſi poſitif ».

Ce réſultat s'accorde parfaitement avec ce que j'ai établi dans ce Mémoire. Il faut ſeulement remarquer

que l'Auteur de la Lettre nomme φ, ce que j'ai appellé $\frac{\Phi}{p}$, & qu'il ſuppoſe (ce qui eſt permis) $\mathfrak{f} = 1$ & $\Delta = f + 1$. Au moyen de cette ſubſtitution, on s'aſſurera aiſément que nous ſommes parfaitement d'accord ſur tous les points. Quoique l'évidence avec laquelle j'ai réfuté dans ce Mémoire l'Auteur de la Note en queſtion n'ait beſoin d'être appuyée d'aucune autorité, j'ai cru qu'il ne ſeroit pas inutile d'oppoſer celle-ci à mon Adverſaire, ne fût-ce que pour le rendre à l'avenir moins déciſif dans ſes aſſertions.

ARTICLE IV.

Sur l'effet de la peſanteur au ſommet & au pied des Montagnes (a).

1. ON trouve dans le *Journal des Beaux Arts*, (ci-devant Journal de Trévoux) mois de Juin 1769, le détail des expériences faites par un Phyſicien au ſommet & au pied des Alpes; expériences par leſquelles il trouve qu'au ſommet de ces Montagnes, à la hauteur de 1085 toiſes, un pendule à ſecondes s'eſt accéléré de 28′ en deux mois; d'où il réſulte que la peſanteur eſt plus grande au haut des Alpes que dans la vallée. Je ne m'arrêterai point à réfuter les conſéquences peu ſolides que l'Auteur tire de ces expériences contre la Figure de la Terre, & contre le ſyſtême de la gravitation. Mais je vais montrer comment on peut expliquer le fait, en ſuppoſant que les obſervations ſoient exactes.

2. Soit 2π le rapport de la circonférence au rayon; l'attraction qu'un cercle de la denſité Δ' & du rayon x, exerce ſur un corpuſcule placé perpendiculairement au-deſſus de ſon centre à la diſtance ρ, eſt $2\pi\Delta'\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{(\rho\rho + xx)}}\right)$.

(a) Ce dernier Article a été lu à l'Académie le 10 Juin 1769.

3. Donc si on suppose que les tranches horizontales de la Montagne soient circulaires, son attraction sera $2\pi\Delta'(\delta - K)$, K étant ce que devient $\int \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{(\varrho\varrho + xx)}}$ lorsque $\rho = \delta$, que je suppose la hauteur de la Montagne.

4. Donc 1°. si la Montagne est un hémisphere, on aura $xx = 2\delta\rho - \rho\rho$, $\int \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{(\varrho\varrho + xx)}} = \int \frac{d\varrho\sqrt{\varrho}}{\sqrt{(2\delta)}} = \frac{2x\varrho\sqrt{\varrho}}{3\sqrt{(2\delta)}}$, & l'attraction $= 2\pi\Delta'\left(\delta - \frac{\delta\sqrt{2}}{3}\right)$.

2°. Si la Montagne est simplement une portion de sphere dont r' soit le rayon, on aura l'attraction $= 2\pi\Delta'\left(\delta - \frac{\delta\sqrt{\delta}.\sqrt{2}}{3\sqrt{r'}}\right)$.

3°. Si la Montagne est un cone & que $x = m\rho$, l'attraction sera $2\pi\Delta'\left(\delta - \frac{\delta}{\sqrt{(1+mm)}}\right)$.

4°. Enfin, si on suppose les coupes de la Montagne *de figure quelconque*, mais d'une étendue très-grande par rapport à leur distance ρ du sommet de la Montagne, l'attraction de ces coupes sera sensiblement égale à celle d'un cercle dont le rayon x seroit infini ou très-grand par rapport à ρ. Elle sera par conséquent $2\pi\Delta'$; & l'attraction de la Montagne $2\pi\Delta'\delta$. On peut donc regarder cette quantité très-simple comme la valeur sensiblement exacte de l'attraction d'une Montagne *de figure quelconque*, dont la base sera très-grande par rapport à sa hauteur.

5. Soit maintenant r le rayon de la Terre, & Δ la denſité moyenne de notre globe, c'eſt-à-dire, la denſité d'un globe homogene & de même rayon, qui exerceroit la même attraction; il eſt clair que l'attraction totale au ſommet de la Montagne ſera $\frac{4\pi\Delta r^3}{3(r+\delta)^2} + 2\pi\Delta'\delta = \frac{4\pi\Delta r}{3} + 2\pi\left(\Delta'\delta - \frac{4\Delta\delta}{3}\right)$. D'où l'on voit que la peſanteur ſera la même au ſommet de la Montagne & dans la plaine, ſi $\Delta' = \frac{4\Delta}{3}$.

6. Suppoſons préſentement qu'au pied de la Montagne l'attraction exercée par ſa maſſe dans le ſens horizontal ſoit $a\Delta'$, & dans le ſens vertical $C\Delta'$, la peſanteur totale qui en réſultera ſera $\sqrt{\left[\left(\frac{4\pi\Delta r}{3} - C\Delta'\right)^2 + a^2\Delta'^2\right]} =$ à très-peu près $\frac{4\pi\Delta r}{3} - C\Delta'$; de plus les temps des vibrations du pendule, au ſommet & au pied de la Montagne, doivent être en raiſon inverſe des racines quarrées de leurs péſanteurs; & comme le pendule placé au ſommet des Alpes à la diſtance de 1085 toiſes a accéléré ſon mouvement d'environ 28′ en deux mois, ces temps ſont entr'eux comme $1 - \frac{28}{24.60.60}$ eſt à 1. Donc on aura $1 - \frac{7}{21600} : 1 :: 1 - \frac{3C\Delta'\pi}{8\pi\Delta r} : 1 + \frac{(3\Delta'\delta - 4\Delta\delta)\pi}{4\pi\Delta r}$; d'où l'on tire $1 + \frac{7}{21600} \times \frac{r}{\delta} = \frac{\Delta'}{\Delta}\left(\frac{3}{4} + \frac{3C}{8\delta\pi}\right)$.

7. Dans les expériences dont il s'agit, $\delta = 1085^{\text{toises}}$ & $r =$ à très-peu près 3270000 toises, d'où il s'enſuit que $\frac{7r}{21600.\delta} =$ à peu près 1. Donc en ſuppoſant $\mathfrak{C}$ très-petit ou zéro, on aura $\Delta' = \frac{8\Delta}{3}$ à peu près.

8. La ſuppoſition de $\mathfrak{C} = 0$ ou très-petit, n'a rien ici que de très-naturel. En effet, puiſque (*hyp.*) la Montagne a une baſe très-grande par rapport à ſa hauteur, il eſt aiſé de voir que l'attraction qu'elle exercera à ſa partie inférieure ſera preſque horizontale, d'où il réſulte que $\mathfrak{C}$ pourra être ſuppoſé $= 0$.

9. Cependant, ſi à côté de cette Montagne d'une hauteur peu conſidérable par rapport à ſa baſe, on en ſuppoſoit une hémiſphérique, (par exemple) de la denſité Δ'', & qu'on imaginât le pendule placé dans la vallée entre le pied de ces Montagnes; alors l'attraction verticale $\Delta''\mathfrak{C}$ qu'exerceroit ſur ce pendule la Montagne hémiſphérique ſeroit ſenſible; & il ſeroit bon d'en tenir compte. Pour la calculer, je remarque que l'attraction qu'une demi-circonférence du rayon ρ & de la denſité Δ'' exerce parallèlement à ſon plan ſur un point placé perpendiculairement au-deſſus du centre à la diſtance a, eſt $\frac{2\Delta''\varrho\varrho}{(aa+\varrho\varrho)^{\frac{1}{2}}}$; d'où il s'enſuit que l'attraction exercée ſur le même corpuſcule par le demi-cercle du même rayon eſt $\int\frac{2\varrho\varrho d\varrho.\Delta''}{(aa+\varrho\varrho)^{\frac{1}{2}}} = 2\Delta''\int\frac{d\varrho}{\sqrt{(aa+\varrho\varrho)}}$

$$-\int\frac{2\Delta''aad\varrho}{(aa+\varrho\varrho)^{\frac{1}{2}}}=2\Delta''\left[\log.\left(\frac{\varrho}{a}+\frac{\sqrt{(aa+\varrho\varrho)}}{a}\right)-\frac{\varrho}{\sqrt{(aa+\varrho\varrho)}}\right].$$

10. Pour avoir maintenant l'attraction qu'une demi-ſphere de la denſité Δ'' exerce perpendiculairement à ſa baſe ſur un point placé à la circonférence de cette baſe, ou du moins qui en ſoit très-proche, ſoit x la diſtance de ce point à un des demi-cercles verticaux perpendiculaires à la baſe, & ſoit δ' le rayon de la ſphere, on aura $\rho=\sqrt{(2\delta'x-xx)}$, $\sqrt{(aa+\rho\rho)}=\sqrt{(2\delta'x)}$, & l'élément de l'attraction ſera $2\Delta''dx\times\log.\left(\frac{\sqrt{(2\delta'x-xx)}+\sqrt{(2\delta'x)}}{x}\right)-\frac{2\Delta''dx\sqrt{(2\delta'x-xx)}}{\sqrt{(2\delta'x)}}$, dont l'intégrale eſt $2\Delta''x\log.\left(\frac{\sqrt{(2\delta'-x)}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(2\delta')}}{\sqrt{x}}\right)-\int 2\Delta''x\,d\log.\left(\frac{\sqrt{(2\delta'-x)}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(2\delta')}}{\sqrt{x}}\right)+\frac{4\Delta''(2\delta'-x)^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{(2\delta')}}-\frac{8\Delta''\delta'}{3}$. Or $d\log.\left(\frac{\sqrt{(2\delta'-x)}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(2\delta')}}{\sqrt{x}}\right)=d\log.\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\times(\sqrt{(2\delta'-x)}+\sqrt{[2\delta']})\right]=-\frac{dx}{2x}-\frac{dx}{2\sqrt{(2\delta'-x)}[\sqrt{2\delta'-x}+\sqrt{(2\delta')}]}$. Donc $-\int 2\Delta''x\,d\log.\left(\frac{\sqrt{(2\delta'-x)}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(2\delta')}}{\sqrt{x}}\right)=\Delta''dx+\Delta''\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(2\delta'-x)}[\sqrt{(2\delta'-x)}+\sqrt{(2\delta')}]}$. Soit $2\delta'-x=\frac{\zeta\zeta}{\delta'}$, & la quantité qui eſt ſous le ſigne $\int$

ſera $= -\frac{2\Delta'' dz(2\delta'\delta''-zz)}{\delta'(\delta''\sqrt{2}+z)} = -\frac{2\Delta'' dz(\delta''\sqrt{2}-z)}{\delta''}$;

dont l'intégrale complette, après les ſubſtitutions, eſt $\Delta'' \times [\sqrt{2}\delta' - \sqrt{(2\delta' - x)}]^2$.

11. Donc lorſque $x = 2\delta'$, l'attraction totale ſera $-\frac{8\Delta''\delta'^2}{3} + 2\Delta''\delta' + 2\Delta''\delta' = \frac{4\Delta''\delta'}{3}$. Donc $6 = \frac{4\delta''}{3}$.

12. Donc (*art.* 6) ſi on ſuppoſe que α ſoit l'accélération du pendule au haut de la Montagne, on aura $1 + \frac{\alpha r}{\delta} = \frac{\Delta'}{\Delta}\left(\frac{3}{4} + \frac{\delta''\Delta''}{2\Delta'\pi\delta}\right)$.

13. De-là il eſt aiſé de voir qu'on peut faire une infinité d'hypothèſes qui donneront $\frac{\Delta'}{\Delta}$ beaucoup plus petit que $\frac{8}{11}$. Par exemple, ſoit $\delta' = 4\delta$, $\Delta'' = 3\Delta'$, & comme 2π eſt à peu près $= 6$, on aura dans l'hypothèſe de l'*art.* 7, l'équation $2 = \frac{\Delta'}{\Delta}(\frac{3}{4} + 2)$ & $\Delta' = \frac{8\Delta}{11}$ à peu près.

14. Si on ſuppoſoit $\Delta'' = \Delta$, on auroit $\Delta' = \frac{24\Delta}{17}$; & ainſi du reſte; & en général ſi on ſuppoſe $2\pi = \frac{44}{7}$, $\delta' = m\delta$, $\Delta'' = n\Delta'$, on aura $2 = \frac{\Delta'}{\Delta}\left(\frac{3}{4} + \frac{7mn}{44}\right)$ & $\Delta' = \frac{\Delta \times 88}{33 + 7mn}$.

15. La plus grande valeur de Δ' eſt $\frac{8\Delta}{3}$, & cette

hypothèſe n'a rien de forcé; puiſqu'on peut très-bien ſuppoſer que la denſité moyenne de la Terre eſt moindre que la denſité des couches qui ſont à ſa ſurface.

16. Si on ſuppoſoit un pendule placé d'abord ſur une Montagne hémiſphérique de la hauteur δ, & de la denſité Δ', & enſuite au pied de deux Montagnes hémiſphériques très-proches, dont les hauteurs fuſſent δ, δ', & les denſités Δ', Δ'', ſa peſanteur dans le premier cas ſeroit $\frac{4\pi\Delta r}{3} + 2\pi\left(\Delta'\delta - \frac{4\Delta\delta}{3}\right)$ & dans le ſecond $\frac{4\pi\Delta r}{3} - \frac{4\Delta'\delta'}{3} - \frac{4\Delta''\delta'}{3}$, attendu que dans ce dernier cas l'attraction *réunie* des deux Montagnes tend à diminuer la peſanteur. On aura donc pour lors $1 + \frac{\alpha r}{\delta} = \frac{\Delta'}{\Delta}\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\delta'\Delta''}{2\Delta'\pi\delta}\right)$.

17. Si la Montagne qu'on ſuppoſe attirer le pendule placé à ſon pied, étoit une moitié de cône dont les coupes verticales fuſſent des cercles, & dont la pointe fût par conſéquent à la baſe de la Montagne, on auroit dans l'*art.* 9, $a = x$, $\rho = mx$, m étant un nombre conſtant; & l'attraction ſeroit (en nommant δ' la hauteur de la Montagne) $\frac{2\Delta''\delta'}{m}\log.[m + \sqrt{(1+mm)}] - \frac{2\delta'\Delta''}{\sqrt{(1+mm)}}$. En ſuppoſant m très-grand, cette quantité ſeroit $\frac{2\Delta''\delta'}{m}$ log. $2m$ à très-peu près, & faiſant m très-petit, elle ſeroit à très-peu près $\frac{2\Delta''\delta' m^2}{2} = \Delta''\delta' m^2$.

Il n'y a donc pour lors qu'à mettre ces quantités au lieu de $6\Delta'$, dans l'équation $1 + \frac{\alpha r}{\delta} = \frac{\Delta'}{\Delta}\left(\frac{3}{4} + \frac{3C}{8\delta\pi}\right)$ de l'*art.* 6.

18. On ſent aſſez qu'il eſt aiſé de pouſſer ces différentes hypothèſes plus loin, & de donner par ce moyen différentes explications, toutes également ſatisfaiſantes, du phénomene dont il s'agit. La connoiſſance topographique du local peut ſervir à indiquer l'explication qu'on pourroit adopter de préférence.

19. Au reſte, les obſervations du pendule faites dans les Alpes, en les ſuppoſant exactes, ne ſont pas les mêmes dans toutes les Montagnes. M. Bouguer a trouvé que le pendule doit être plus court au haut des Cordelieres qu'au niveau de la mer. Voyez l'Ouvrage de cet Académicien ſur la Figure de la Terre, page 357 & ſuivantes. On y trouve une Théorie de l'Attraction des Montagnes, mais beaucoup moins générale que celle qui a été l'objet de ce Mémoire.

ADDITION

A L'ARTICLE PRÉCÉDENT,

Faite en Janvier 1772.

1. LONG-TEMPS après avoir fini ce dernier Mémoire, ſur l'effet de la peſanteur au ſommet & au pied des Montagnes, j'ai trouvé dans le *Journal des Beaux Arts* (Décembre 1771) de nouvelles expériences, qui paroiſſent confirmer celles qui ſont rapportées dans le même Journal en Juin 1769, & qu'on a tâché d'expliquer dans l'écrit précédent.

2. Un Phyſicien, qui demeure dans les Montagnes du Valais, a trouvé qu'une excellente pendule à ſecondes, placée à 514 toiſes de hauteur, s'eſt accélérée en 90 jours de 20′ 22″; que la même pendule, à 210 toiſes de hauteur, s'eſt accélérée en 175 jours de 15′ 4″; qu'enfin à 847 toiſes elle s'eſt accélérée en 61 jours de 21′ 5″. (*Voyez pag.* 402 *de ce Journal*). L'Auteur obſerve que cette quantité d'accélération eſt à peu près proportionnelle à l'élévation du pendule dans les trois cas; d'où il eſt aiſé de conclure (en ſuppoſant les expériences exactes) que la peſanteur eſt augmentée à très-peu près en raiſon de l'élévation; ce qui s'accorde avec la formule de l'*art.* 5 de l'écrit précédent, puiſque

l'augmentation $2\pi(\Delta'\delta - \frac{4\Delta\delta}{3})$ de la peſanteur eſt à peu près proportionnelle à δ, en ſuppoſant que Δ' ſoit la même dans les trois cas ; ſuppoſition aſſez naturelle dans les expériences dont il s'agit, & qui ont été faites dans des lieux peu éloignés les uns des autres.

3. Cette même loi, de l'accélération en raiſon de la hauteur, paroît s'accorder auſſi avec les expériences rapportées dans le *Journal des Beaux Arts*, mois de Juin 1769 ; d'où il s'enſuivroit que Δ' doit être auſſi à peu près la même, dans le lieu où ſe ſont faites ces premieres expériences, que dans celui où ont été faites celles qu'on vient de rapporter ; ſuppoſition qui eſt encore aſſez vraiſemblable, les cantons du Fauſſigni & du Valais où ſe ſont faites les premieres & les ſecondes expériences étant tous deux ſitués dans les Alpes, & n'étant pas très-éloignés l'un de l'autre.

4. Ce n'eſt pas tout ; non-ſeulement ces expériences donnent l'accélération en raiſon de la hauteur, mais encore ſuivant la remarque des deux Phyſiciens, elles paroiſſent donner le nombre de battemens dans un temps déterminé, en raiſon directe de la diſtance du pendule au centre de la Terre ; d'où il réſulteroit que la peſanteur ſeroit (dans cette partie des Alpes) en raiſon directe (& non inverſe) du quarré de la diſtance au centre de la Terre ; & par conſéquent (*art.* 5 de l'écrit précédent) $\frac{4\pi r\Delta}{3} \times \frac{2\delta}{r} = 2\pi(\Delta'\delta - \frac{4\Delta}{3})$

ou $4\Delta = 3\Delta' - 4\Delta$, & $\Delta' = \frac{8\Delta}{3}$ comme dans l'*art.* 7 de l'écrit précédent.

5. On ſent bien au reſte que cette loi de la peſanteur directement proportionnelle à la diſtance, ne peut avoir lieu tout au plus que dans les endroits où ces expériences ont été faites, & qu'elle ne ſauroit être générale ; puiſque la gravitation en raiſon inverſe du quarré de la diſtance eſt démontrée d'ailleurs par tous les phénomenes.

6. Je ne dois pas omettre de dire 1°. que les expériences rapportées dans le Journal de Décembre 1771, paroiſſent faites avec ſoin, ainſi que celles qui ont été rapportées dans le Journal de Juin 1769 ; que cependant il ne ſeroit pas inutile de répéter les unes & les autres, pour s'aſſurer ſi les Obſervateurs n'ont omis aucune précaution eſſentielle, ſoit dans leurs expériences, ſoit dans l'eſtimation des réſultats qu'elles ont donnés. 2°. Que le ſecond de ces Obſervateurs ne paroît pas très-éloigné d'attribuer l'accélération au haut des Montagnes à l'excès de denſité de ces Montagnes ſur celle des couches placées à la ſurface de la Terre, mais qu'il y préfere l'hypothèſe de l'attraction en raiſon directe des maſſes ſans que la diſtance y entre pour rien, ſuppoſition trop évidemment contredite par les phénomenes pour que nous nous arrêtions à la combattre. En effet, dans cette hypothèſe la force attractive du Soleil, par exemple, ſeroit la même ſur toutes les Pla-

netes, & par conſéquent les quarrés de leurs vîteſſes au lieu d'être en raiſon inverſe des diſtances, comme le donne l'obſervation, ſeroient en raiſon directe de ces mêmes diſtances; & les quarrés des temps des révolutions ſeroient auſſi en raiſon directe des ſimples diſtances, au lieu d'être en raiſon directe des cubes des mêmes diſtances, comme le donnent la loi de Kepler, & l'obſervation.

7. J'ajouterai que le premier des Obſervateurs trouvant que les expériences de M. Bouguer ſur le pendule ſont contraires aux ſiennes (*voyez art. 19 de l'écrit précédent*), révoque en doute l'exactitude des expériences du ſavant Académicien, qui cependant peuvent très-bien s'accorder avec celles des Alpes, en ſuppoſant que la denſité des Cordelieres ſoit plus petite que celle des couches placées à leur baſe, & tout au contraire que cette denſité ſoit plus grande dans les Alpes; & ſi en répétant les expériences de M. Bouguer, il ſe trouvoit que la peſanteur au haut des Cordelieres fût plus grande qu'au bas de ces Montagnes, il s'enſuivroit alors que la denſité de la matiere des Cordelieres ſeroit plus grande que celle des couches placées au bas de ces Montagnes.

8. Si on vouloit que la peſanteur dans une chaîne de Montagnes fût en raiſon de la puiſſance n de la diſtance au centre de la Terre, on auroit $\frac{4\pi\Delta r}{3} \times \frac{n\delta}{r} =$

$2\pi(\Delta'\delta -$

$2\pi\left(\Delta'\delta - \frac{4\Delta\delta}{3}\right)$, & $2n\Delta = 3\Delta' - 4\Delta$; ou $\Delta' = \frac{\Delta(4+2n)}{3}$. D'où l'on voit que n devroit être ou un nombre positif, ou du moins un nombre négatif au-dessous de -2; car Δ' ne sauroit être négatif. On voit de plus que la pesanteur au sommet d'une Montagne doit toujours être plus grande que si Δ' étoit $= 0$, c'est-à-dire, plus grande que $\frac{4\pi\Delta r}{3} - \frac{8\pi\Delta\delta}{3}$, & qu'ainsi la pesanteur sur les Montagnes doit décroître en moindre proportion que la raison inverse du quarré de la distance; ce qui est d'ailleurs évident: car elle décroîtroit précisément en cette raison si la densité de la Montagne étoit nulle; donc elle doit moins décroître qu'en cette raison, la densité de la Montagne devant nécessairement l'augmenter.

9. Je n'ai point eu égard dans l'écrit précédent à la petite différence que doivent produire les forces centrifuges au pied & au sommet de la Montagne; 1°. parce que la force centrifuge qui sous l'équateur est $\frac{1}{289}$ de la pesanteur, ne la diminue à la latitude de 45°, c'est-à-dire, à peu près vers les Alpes, que de la moitié de $\frac{1}{289}$, (c'est-à-dire, en raison du quarré du cosinus de latitude) ensorte qu'à 1000 toises de hauteur ou à la surface de la Terre, la pesanteur est à peu près également diminuée par les forces centrifuges. 2°. Parce que la force centrifuge au sommet de la Montagne étant un peu plus grande qu'à la surface de la Terre, le mou-

vement de la pendule au haut de la Montagne devroit plutôt être accéléré que retardé par l'effet de cette force ; & qu'ainſi cette conſidération ne pourroit ſervir à expliquer l'accélération dont il s'agit.

On doit remarquer que les accélérations de 20′ 22″, 15′ 4″, & 21′ 5″ ou 1265″, rapportées ci-deſſus & données pag. 402 du Journal, ne ſont pas exactement les mêmes que les accélérations 21′ 8″, 15′ 6″, 20′ 10″, données aux pag. 396, 398 & 401 du même Journal. Il y a lieu de croire que cette différence vient de ce que l'Auteur, dans les réſultats de la pag. 402, a eu égard à la différence du temps vrai au temps moyen, dont il dit à la pag. 396 qu'il a fait abſtraction dans les premiers réſultats.

J'ajouterai, en finiſſant ce Mémoire, que dans la Lettre très-courte que j'ai inſérée ſur ce ſujet dans le *Journal des Beaux Arts* de Juin 1769, il s'eſt gliſſé une faute d'impreſſion eſſentielle, qui paroît avoir induit quelques Phyſiciens en erreur, comme on peut le voir par le Journal de Janvier 1772. Suivant les expériences de M. Bouguer, la peſanteur ſur Pichincha eſt *plus petite* qu'à Quito, & à Quito qu'au bord de la mer, & non *plus grande*, comme on l'a imprimé dans l'endroit cité du Journal de 1769 ; erreur qu'il eſt d'ailleurs facile de corriger par la phraſe même qui précéde, & dans laquelle on dit que l'augmentation de la peſanteur au ſommet des Alpes, en la ſuppoſant vraie, *n'eſt pas générale* pour toutes les Montagnes.

XLVI. MÉMOIRE.

Suite des Recherches ſur la Figure de la Terre.

1. J'AI donné à la fin de la premiere partie de ces *Recherches*, art. 45 (*), l'équation d'un ſphéroïde fluide homogene qui tourneroit ſur ſon axe, & qui en même-temps ſeroit attiré par un corps éloigné, placé dans ce même axe. J'ai même, pour plus de généralité, ſuppoſé la loi d'attraction tout-à-la-fois proportionnelle à la diſtance ſimple, & à l'inverſe du quarré de la diſtance; & de cette hypothèſe il a réſulté qu'il pouvoit y avoir dans le ſphéroïde fluide deux cas d'équilibre, au moins dans certaines ſuppoſitions. Je vais maintenant ſuppoſer les choſes telles qu'elles ſont, c'eſt-à-dire, l'attraction ſimplement en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, & le corps attirant placé où l'on voudra; mais avant d'en venir à ce dernier cas, je ſuppoſerai d'abord placé dans l'axe de rotation le corps attirant; cette conſidération donne lieu à des remarques curieuſes.

(*) Voyez le Mémoire précédent, §. II, pag. 65.

2. Reprenant donc l'équation de l'*art.* 45 du premier Mémoire §. II, & ſuppoſant l'attraction ſimplement proportionnelle à la raiſon inverſe du quarré de la diſtance, on fera $\frac{1}{C^3} = 0$ dans cette équation, & on aura $\frac{2\omega}{3} = \frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} + \frac{2A^3}{3C^3}\left(1 + \frac{2}{kk+1}\right)$.

3. Je remarquerai d'abord que ſi on appelle m le rapport du diametre de l'équateur à l'axe, comme dans l'*art.* 3 du premier Mémoire §. II, on aura $k = \sqrt{(mm-1)}$; quantité qui n'eſt réelle que quand m n'eſt pas < 1; & comme m peut être ici plus petit que 1, puiſque l'action du corps étranger placé dans l'axe (*hyp.*) peut allonger le ſphéroïde, il s'enſuit que pour avoir une formule générale ſans embarras d'imaginaires, il faut d'abord ſubſtituer à k ſa valeur $\sqrt{(mm-1)}$ & mettre enſuite au lieu de ATk ſa valeur connue $\frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \log.\left(\frac{1+\sqrt{(mm-1)}.\sqrt{-1}}{1-\sqrt{(mm-1)}.\sqrt{-1}}\right)$; enſorte que quand m ſera < 1, la quantité $\frac{ATk}{k}$ deviendra réelle & $= \frac{1}{2\sqrt{-1}.\sqrt{(mm-1)}} \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$ (*a*) $= \frac{1}{2\sqrt{(1-mm)}} \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$.

4. Ainſi quand m ſera > 1, le ſecond membre de l'équation deviendra $\frac{(m^2+2)AT.\sqrt{(mm-1)}}{(mm-1)^{\frac{1}{2}}}$ =

(*a*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

$\frac{3}{m^2-1} + \frac{2A^3}{3C'^3}\left(1+\frac{2}{m^2}\right)$; & quand m ſera < 1, il ſera $\frac{(m^2+2)}{2(mm-1)\sqrt{(1-mm)}} \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \frac{3}{mm-1} + \frac{2A^3}{3C'^3}\left(1+\frac{2}{m^2}\right)$.

5. Nous avons vu que lorſque k^2 eſt infiniment petit, la quantité $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3} = \frac{4k^2}{3\cdot 5}$; d'où il s'enſuit 1°. que quand k^2 eſt infiniment petite & négative, cette quantité ſera infiniment petite & négative, & qu'elle ſera poſitive & infiniment petite, ſi k^2 eſt infiniment petite & poſitive; donc $\frac{4k^2}{3\cdot 5}$ ſera négatif & infiniment petit, ſi m eſt < 1; & poſitif, mais toujours infiniment petit, ſi $m > 1$. 2°. Que la différence de $\frac{4k^2}{3\cdot 5}$ ſera $\frac{8kdk}{3\cdot 5} = \frac{8mdm}{3\cdot 5}$; donc, prenant $AP = m$ pour abſciſſe, (Fig. 5) l'angle que fait la courbe avec ſon axe au point S ou $m = 1$, a pour tangente $\frac{8}{3\cdot 5}$.

6. De plus, lorſque $m = 0$, ce qui donne $k^2 = -1$, la quantité $\frac{m^2+2}{2(m^2-1)\sqrt{(1-mm)}} \times \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \frac{3}{mm-1}$ devient $-\log.\frac{2}{0} + 3 = -\infty$, & par conſéquent infinie & négative. Enfin nous avons vu dans le Mémoire précédent que quand k eſt infini, ce qui donne m infini, puiſqu'alors $k = m - \frac{1}{2m}$, la quan-

tité $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ est infiniment petite.

7. D'où il s'ensuit que si on fait les abscisses $AP=m$, & les ordonnées égales à $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$, k étant réel ou imaginaire, la courbe aura à peu près la forme indiquée dans la figure cinquiéme, coupant son axe au point S, ou $AS=1$, & ayant AT & AQ pour asymptotes.

8. Nous remarquerons encore que lorsque m est infiniment petit, $\log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$ devient $\log.\frac{4}{mm}=2\log.\frac{2}{m}$; or on sait que le logarithme d'une quantité infinie $\frac{2}{m}$ est infiniment petit par rapport à cette quantité $\frac{2}{m}$; d'où il s'ensuit que $\frac{\log.\frac{2}{m}}{\frac{2}{m}}=0$. Cette remarque nous sera très-utile dans la suite (*b*).

9. Il n'est pas difficile de prouver que tant que k^2 est positif, & que par conséquent ATk est réel, la quantité $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ est toujours positive; pour le démontrer, il suffit de faire voir que ATk est toujours $>\frac{k}{1+\frac{kk}{3}}$. Or lorsque k est infiniment petit, $ATk=k-\frac{1}{3}k^3+\frac{k^5}{5}$, &c. & $\frac{k}{1+\frac{k^2}{3}}=k-\frac{k^3}{3}+\frac{k^5}{9}$,

(*b*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

&c. donc alors ATk eſt $> \frac{k}{1+\frac{kk}{3}}$, 2°. lorſque k eſt infini, on a $ATk = 90°$, & $\frac{k}{1+\frac{k^2}{3}} = 0$. 3°. La plus grande valeur de $\frac{k}{1+\frac{kk}{3}}$ arrive lorſque $\frac{dk}{k} - \frac{2kdk}{3(1+\frac{kk}{3})} =$, c'eſt-à-dire, lorſque $3 - kk = 0$, ou $k = \sqrt{3}$, & par conſéquent la plus grande valeur de la quantité $\frac{k}{1+\frac{kk}{3}}$ eſt $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or l'angle dont la tangente eſt ATk, eſt toujours plus grand que ſon ſinus $\frac{k}{\sqrt{(kk+1)}}$, & lorſque $k = \sqrt{3}$, ce ſinus devient $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc lorſque $\frac{k}{1+\frac{kk}{3}}$ a ſa plus grande valeur, cette quantité eſt encore plus petite que l'angle correſpondant ATk. Donc dans tous les cas ATk eſt $> \frac{k}{1+\frac{kk}{3}}$.

10. Je dis maintenant que lorſque k^2 eſt négatif, $\frac{(k^2+3)ATk}{k^3} - \frac{3}{k^2}$ ſera négatif. Car alors cette quantité ſe réduira à $\frac{m^2+2}{2(mm-1)\sqrt{(1-m^2)}} \log. \left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \frac{3}{mm-1}$. Donc puiſque $m^2 - 1$ eſt ici négatif, la queſtion ſe réduit à prouver que

$\frac{m^2+2}{2\sqrt{(1-mm)}}$ log. $\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - 3$ eſt poſitif, ou ce qui eſt la même choſe, que $\frac{1}{2}$ log. $\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \frac{3\sqrt{(1-m^2)}}{m^2+2}$ eſt poſitif. Or 1°. lorſque $m = 0$, cette quantité eſt infinie & poſitive, & elle eſt nulle lorſque $m = 1$; il ſuffira donc de prouver que cette quantité, qui eſt poſitive & infinie quand $m = 0$, & $= 0$ quand $m = 1$, a pour différence une quantité qui eſt toujours négative tant que m ſera < 1; car de-là il réſultera évidemment que la quantité dont il s'agit va en décroiſſant depuis $m = 0$ juſqu'à $m = 1$, & comme elle ne devient $= 0$ que quand $m = 1$, elle ſera donc poſitive tant que m ſera < 1. Or la différence de la quantité dont il s'agit eſt $= \frac{dm}{m\sqrt{(1-mm)}} + \frac{mdm(12-3m^2)}{(m^2+2)^2\sqrt{(1-mm)}} = -\frac{dm}{m(m^2+2)\sqrt{(1-mm)}} \times [(m^2+2)^2 - m^2(12-3m^2)] = -\frac{dm\times(4m^4-8m^2+4)}{m(m^2+2)^2\sqrt{(1-mm)}} = -\frac{dm(2m^2-2)^2}{m(m^2+2)^2\sqrt{(1-mm)}}$; donc puiſque le facteur quarré $(2m^2-2)^2$ eſt toujours poſitif, il s'enſuit que la différence dont il s'agit eſt négative. Donc, &c. On voit donc que nous avons bien tracé dans la Fig. 5 la courbe $RSMO$, en lui donnant des ordonnées toujours poſitives depuis le point S ou $m = 1$ juſqu'en T ou $m = \infty$; & des ordonnées toujours négatives depuis le point S juſqu'en A ou $m = 0$ (c).

(c) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

11. Cela posé, ajoutons maintenant aux ordonnées $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ de cette courbe, la quantité $\frac{2A^3}{3C^3}\left(1+\frac{2}{m^2}\right)$; & voyons quelle courbe en résultera. En premier lieu, puisque $\frac{2}{m}$, & à plus forte raison $\frac{4}{m^2}$ ou $\frac{4}{kk+1}$ est infini par rapport à log. $\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$ lorsque m est infiniment petit, il est visible que pour peu que $\frac{A^3}{3C^3}$ ne soit pas $= 0$, la premiere ordonnée $\frac{m^2+2}{2(mm-1)\sqrt{(1-mm)}} \times$ log. $\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) + \frac{3}{1-mm} + \frac{2A^3}{3C^3} + \frac{4A^3}{3C^3m^2}$ qui répond à $m = 0$, sera nécessairement réelle & positive, & même infinie; & que quand m sera $= \infty$, ce qui donne $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3} = 0$, cette ordonnée sera $\frac{2A^3}{3C^3}$, c'est-à-dire, finie & positive. Donc ω étant nécessairement positif, & la premiere ordonnée étant infinie & positive, il s'ensuit que quelque grandeur qu'on suppose à ω, il y aura toujours une solution possible du problême; pourvû néanmoins que la valeur de k résultante de cette solution soit telle que l'attraction au pole ne soit pas négative. Car en ce cas l'attraction à l'équateur ne le sera pas non plus, puisqu'elle est

toujours à l'attraction au pole, comme 1 eſt à m. Or l'attraction au pole eſt $\frac{2ca(kk+1)}{k^3}(k - ATk) - \frac{4cA^3a}{3C'^3}$, comme il eſt très-aiſé de le voir; il faut donc que $k - ATk$ ne ſoit pas moindre que $\frac{2A^3k^3}{m^2C'^3}$ (*d*). Il faut remarquer encore que ſi $\frac{2\omega}{3}$ étoit $< \frac{2A^3}{3C'^3}$, & que la courbe n'eût point d'ordonnées négatives, alors il pourroit ſe faire que la parallèle à l'axe, menée à la diſtance $\frac{2\omega}{3}$, ne rencontrât point la courbe, & que par conſéquent la ſolution ne fût pas poſſible.

12. Si la force centrifuge eſt nulle, c'eſt-à-dire, ſi $\omega = 0$, l'attraction à l'équateur ſera évidemment poſitive, car elle l'eſt déja évidemment par elle-même, abſtraction faite de la force centrifuge qui eſt ici nulle; & de l'attraction du corps S; & en ayant égard à cette derniere attraction, ſi le corps S eſt ſuppoſé au pole, la quantité $\frac{2A^3a}{3C'^3}$ doit s'ajouter à l'attraction à l'équateur; donc cette attraction ſera poſitive; donc (*article précédent*) l'attraction au pole ſera auſſi poſitive, dans les cas où le problême ſera poſſible; c'eſt-à-dire, dans les cas où il ſera poſſible d'égaler la peſanteur des deux colomnes de l'équateur & du pole, & de trouver une

(*d*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

ou pluſieurs valeurs réelles de m qui ſatisfaſſent à cette condition.

13. Donc toutes les fois qu'on trouvera pluſieurs valeurs réelles de m, en ſuppoſant $\omega = 0$, il n'eſt point à craindre que les parties de la Terre ſe diſſipent dans aucun des cas donnés par ces différentes valeurs. C'eſt un point ſur lequel nous reviendrons plus bas, après avoir donné auparavant la conſtruction générale de la courbe.

14. Si on trace la courbe dont les ordonnées ſont $\frac{m^2+2}{2(mm-1)\sqrt{(1-mm)}} \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) + \frac{3}{1-mm}$ ou plutôt $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ comme dans la figure cinquiéme, & qu'on y ajoute $\frac{4A^3}{3C^3m^2}$, on aura une nouvelle courbe $R'KNQ$ (Fig. 6) dont j'appelle les ordonnées q, & qui donnera $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C^3} = q$.

15. Or la quantité $\frac{4A^3}{3C^3m^2}$ ajoutée aux ordonnées de la courbe $RSMO$ (Fig. 5) va toujours en diminuant. D'où il eſt aiſé de conclure que ſi la valeur $\frac{4A^3}{3C^3}$ de $\frac{4A^3}{3C^3m^2}$ lorſque $m = 1$; & que je ſuppoſe $= R'S$, eſt $=$ ou $<$ que la plus grande ordonnée PM de la courbe SMO, la courbe $R'KNQ$ dont les ordonnées ſont q, aura à peu près la forme repréſentée dans la Fig. 6, ayant un point N', où la tan-

gente ſera parallèle à l'axe. Car les ordonnées q étant toujours plus grandes que les ordonnées correſpondantes de la courbe SMO, puiſqu'elles les ſurpaſſent de la quantité $\frac{4A^3}{3C^3m^2}$, il eſt clair que la courbe $R'KN'NQ$ ſera toute entiere au-deſſus de la courbe SMO; donc l'ordonnée PN répondante au point P ſera $> PM$, & à plus forte raiſon $> SR'$, puiſque (*hyp.*) $SR' =$ ou $< PM$. De plus, $\frac{4A^3}{3C^3m^2}$ étant $= 0$ quand $m = \infty$, & $\frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3}$ étant $= 0$ dans le même cas, l'ordonnée de la courbe $R'KNQ$ eſt $= 0$ quand $m = \infty$. Donc la courbe $R'KNQ$ eſt plus proche de ſon axe en R' & en Q qu'en N. Donc il y a néceſſairement quelque point N' où la tangente eſt parallèle à l'axe.

16. Comme la différence de $\frac{4A^3}{3C^3m^2}$ ou de MN eſt négative, il eſt clair qu'au point P, où $d(PM) = 0$, la différence de PN eſt négative. Donc le point N' qui donne le *maximum* doit ſe trouver entre R' & N (*e*).

17. Si on continue la courbe $R'KN'$ de l'autre côté de R, on verra 1°. (*art.* 11) que lorſque $m = 0$, l'ordonnée eſt poſitive & infinie, & qu'ainſi la courbe a pour aſymptote AL perpendiculaire à AT. 2°. Que

(*e*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

si $\frac{4A^3}{3C'^3m^2}$ est en quelquē point, ou en plusieurs points, moindre que l'ordonnée négative correspondante de la courbe SR (Fig. 5), la courbe $R'ZL$ (Fig. 6), qui n'est autre chose que la courbe $R'KN'$ continuée, aura des ordonnées négatives, & que par conséquent elle coupera son axe au moins en deux points M, H.

18. Donc si $\frac{4A^3}{3C'^3m^2}$ est plus petit que l'ordonnée négative correspondante de la courbe SR, & qu'en même-temps $\frac{4A^3}{3C'^3}$ soit moindre que la plus grande des ordonnées PM de la courbe SMO, il y aura au moins deux points N', Z, de la courbe, où la tangente sera parallèle à l'axe, un à droite de SR' & au-dessous de l'axe AT dans notre figure; & l'autre à gauche de SR' & au-dessus de ce même axe.

19. Lorsque $\frac{2u}{3} = 0$, c'est-à-dire, lorsqu'il n'y a point de rotation, l'équation est $\frac{2c(1+kk)}{k^3}(k - ATk) - \frac{4cA^3}{3C'^3}$ (attraction au pole) multipliée par $\frac{1}{\sqrt{(1+kk)}} = c(kk+1)^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{(k^2+1).ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right] + \frac{2cA^3\sqrt{(k^2+1)}}{3C'^3}$, attraction à l'équateur; & nous avons vu plus haut (*art.* 12) que ces deux quantités sont toujours positives, lorsque le problême est possible; c'est-à-dire, lorsque l'on trouve pour m une ou

pluſieurs valeurs réelles, ſoit plus grandes, ſoit moindres que l'unité.

20. On aura par conſéquent, dans ce cas de $\omega = 0$;
$$-\frac{2A^3}{3C'^3} = \frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} + \frac{4A^3}{3C'^3(kk+1)};$$
& il réſulte de l'*art.* 11 ci-deſſus, que ſi le ſecond membre eſt toujours poſitif, c'eſt-à-dire, ſi la courbe $R'ZL$ ne coupe point ſon axe, la ſolution ne ſera pas poſſible; mais qu'elle le ſera ſi la courbe coupe ſon axe, & ſi $\frac{2A^3}{3C'^3}$ n'eſt pas plus grand que la plus grande des ordonnées négatives.

21. Il n'eſt pas difficile de prouver qu'on peut ſuppoſer à $\frac{A^3}{C'^3}$ des valeurs qui rendent le problême poſſible. Car ſuppoſons d'abord $\frac{A^3}{C'^3}$ très-petit (ω étant toujours $= 0$) il eſt clair que m différera très-peu de l'unité, enſorte que k^2 ſera très-petit, & on aura (*art.* 5) l'équation $-\frac{2A^3}{3C'^3} = \frac{4k^2}{3\cdot 5} + \frac{4A^3}{3C'^3} - \frac{4A^3k^2}{3C'^3}$; qui donne à très-peu près $\frac{4k^2}{3\cdot 5} = -\frac{2A^3}{C'^3}$; & $k^2 = -\frac{15A^3}{2C'^3}$; donc $m = \sqrt{(1+k^2)} = 1 - \frac{15A^3}{4C'^3}$ & le problême eſt évidemment poſſible.

22. Donc on peut toujours ſuppoſer à $\frac{A^3}{C'^3}$ une valeur qui rende le problême poſſible: car puiſque ce pro-

blême eſt poſſible en ſuppoſant $\frac{A^3}{C'^3}$ très-petit, il doit l'être encore en ſuppoſant $\frac{A^3}{C'^3}$ fini, au moins juſqu'à une certaine limite.

23. Pour déterminer cette limite, on conſidérera qu'il eſt néceſſaire pour la poſſibilité de la ſolution dans le cas préſent, que $\frac{4A^3}{3C'^3m^2} + \frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ ſoit négatif, afin de pouvoir être égal à la quantité négative $-\frac{2A^3}{3C'^3}$; or pour cela il faut que $\frac{4A^3}{3C'^3} + \frac{m^2[(k^2+3)ATk-3k]}{k^3}$ ſoit négatif. Prenons donc la plus grande valeur du ſecond terme de cette quantité, laquelle ſera néceſſairement négative, puiſque m^2 eſt toujours poſitif, & $\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ toujours négatif (*art.* 10) lorſque k^2 eſt négatif; ſoit cette valeur $= -R$; il eſt clair 1°. que ſi $\frac{4A^3}{3C'^3}$ eſt $< R$, la courbe $R'ZL$ coupera ſon axe. 2°. Que ſi on prend le *maximum* de $\frac{4A^3}{3C'^3.mm} + \frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$, que j'appelle $-R'$, & que $-\frac{2A^3}{3C'^3} = -R'$, la valeur de m qui répond à R' réſoudra le problême. 3°. Que ſi $\frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt plus petit que R', le problême ſera encore

poſſible, & aura deux ſolutions. 4°. Enfin, qu'il ſera impoſſible ſi $\frac{2A^3}{3C^3}$ eſt $> R'$ (*f*).

24. Donc dans le troiſiéme cas ſi on fait $AK' = \frac{2A^3}{3C^3}$ (Fig. 6) & qu'on tire $K'N''O'$ parallèle à AS, on aura $m = KN''$ & $= KO'$.

25. Il s'agit maintenant de ſavoir ſi ces deux valeurs donneront un équilibre ferme.

26. Soit cQ l'attraction au pole, & cP l'attraction à l'équateur; il eſt aiſé de voir 1°. que la peſanteur totale de la colomne du pole ſera $\frac{cQa}{2}$, ou ſimplement $\frac{cQ}{2}$, en ſuppoſant $a = 1$; & celle de la colomne de l'équateur $\frac{cP\sqrt{(kk+1)}}{2}$; 2°. que les ordonnées de la courbe, rapportées à l'axe KN'', ſeront $= \frac{P}{\sqrt{(k^2+1)}} - \frac{Q}{k^2+1} = \frac{P\sqrt{(kk+1)}-Q}{k^2+1} = \frac{P\sqrt{(kk+1)}-Q}{m^2}$. 3°. Que l'ordonnée ſera $= 0$ lorſque $m = KN''$ & KO'. 4°. Que ſi on prend m infiniment peu moindre que KN'', l'ordonnée ſera poſitive, & qu'elle ſera négative ſi on prend m infiniment peu plus grande que KN''; ce ſera le contraire ſi on prend ſucceſſivement m infiniment peu moindre & infiniment peu plus grande que KO'.

27. Donc en prenant m tant ſoit peu plus petit que

(*f*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

la

la moindre KN'' des deux valeurs de m, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que la Planete s'allonge dans le ſens de ſon axe, $P\sqrt{(kk+1)} - Q$ ſera poſitif, & par conſéquent la colomne de l'équateur plus peſante que celle du pole ; ce ſera le contraire ſi on prend m tant ſoit peu plus grand que KN'' ; donc la Planete tendra dans le premier cas à s'allonger encore davantage, & au contraire dans le ſecond à s'allonger moins ; donc l'équilibre ne ſera pas ferme, ſi on prend pour m la plus petite KN'' des deux valeurs de m.

28. Au contraire il eſt aiſé de voir par les mêmes raiſons, que l'équilibre ſera ferme ſi on prend pour m la plus grande KO' des deux valeurs de m.

29. Donc il n'y a qu'une ſeule valeur de m qui donne un équilibre ferme lorſque $\frac{2u}{3} = 0$, & que le problême eſt poſſible ; c'eſt-à-dire, lorſque $\frac{2A^3}{3C^3}$ eſt $< R'$.

30. Si $\frac{2A^3}{3C^3} = R'$, les points N'', O' ſe confondront en Z, il n'y aura qu'une valeur poſſible de m, & cette valeur ſera telle, qu'en la diminuant un peu, l'équilibre ne ſe rétabliroit pas, & qu'au contraire, en l'augmentant un peu, il ſe rétabliroit ; cas ſingulier & analogue à celui que nous avons déja remarqué dans le Mém. préc. p. 57 (*art.* 32) lorſque $\frac{2u}{3}$ eſt égal à la plus grande des ordonnées de la courbe $AMNBM$ (Fig. 1).

31. Soit maintenant l'équation générale de la courbe $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3} = \frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} + \frac{4A^3}{3C'^3(kk+1)}$, k^2 étant positif ou négatif; il résulte des *art.* 15 & 17 que si on suppose $\frac{4A^3}{3C'^3}$ égal ou $< PM$ (Fig. 6) & $\frac{4A^3}{3C'^3 m^2}$ plus petit que quelqu'une des ordonnées correspondantes de la courbe SR, (Fig. 5) la courbe $QN'R'ZL$ à laquelle appartient le second membre de l'équation précédente, pris pour ordonnée, coupera son axe AS en deux points M', H, & aura de plus au moins deux points Z, N', où la tangente sera parallèle à l'axe.

32. Donc si $\frac{A^3}{C'^3}$ est assujetti aux conditions énoncées dans l'article précédent, & qu'outre cela on suppose $\frac{2\omega}{3}$ tel que $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ soit négatif & égal ou plus petit que la plus grande ordonnée négative de la courbe $QN'R'ZL$, la parallèle $K'O'$ à l'axe AS, menée au-dessus de cet axe du côté de K', & à la distance $-\frac{2\omega}{3} + \frac{2A^3}{3C'^3}$, coupera la courbe en deux points qui donneront deux solutions; & il n'est pas difficile de voir par un raisonnement semblable à celui de l'*art.* 26, que de ces deux valeurs de m, la première ou plus petite donnera un équilibre non ferme, la seconde un équilibre ferme.

33. Il ne reſte plus qu'à ſavoir ſi la force centrifuge à l'équateur ne ſera pas plus grande que l'attraction; car en ce cas les parties de la Planete ſe diſſiperoient. Or il eſt aiſé de voir que l'attraction à l'équateur étant toujours poſitive, lorſque la force centrifuge eſt $= 0$, & lorſque $\frac{2A^3}{3C^3} = 0$, elle demeurera poſitive ſi $\frac{2\omega^2}{3} + \frac{2A^3}{3C^3}$ eſt négatif comme on le ſuppoſe; car en ce cas $\frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2\omega^2}{3}$ ſera poſitif, & la quantité $\left(\frac{2cA^3}{3C^3} - \frac{2c\omega^2}{3}\right) \times V(kk+1)$ dont l'attraction à l'équateur ſera augmentée, demeurera poſitive.

34. Si $\frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2\omega^2}{3} = 0$, il eſt clair que la ſolution eſt encore poſſible, & qu'on aura deux valeurs finies de m qui y ſatisferont, & toutes deux moindres que l'unité; ces deux valeurs ſeront AH & AM, dont la premiere donnera un équilibre non ferme, la ſeconde un équilibre ferme.

35. Si $-\frac{2A^3}{3C^3} + \frac{2\omega^2}{3}$ eſt poſitif, le problême ſera encore poſſible, au moins juſqu'à de certaines limites. Car en ſuppoſant cette quantité très-petite, la valeur de m qui en réſultera ſera évidemment très-peu différente de celle qui réſulte de $\frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2\omega^2}{3} = 0$; donc l'attraction à l'équateur qui eſt finie & poſitive

dans ce dernier cas, ne ſera diminuée que d'une quantité très-petite, & reſtera par conſéquent encore poſitive. Donc, &c.

36. Comme la premiere ordonnée répondante à $m = 0$ eſt infinie & poſitive, & que la derniere, répondante à $m = \infty$, eſt $= 0$, il eſt clair que ſi on ſuppoſe $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C^3}$ poſitif, il y aura toujours quelque valeur de k qui réſoudra le problême.

37. Mais cette valeur ne ſera légitime que dans le cas où l'attraction à l'équateur ſera poſitive, condition néceſſaire (*art.* 11) pour que l'attraction au pole le ſoit auſſi. Or pour que l'attraction à l'équateur ſoit poſitive, il eſt aiſé de voir (*art.* 19) que $c(kk+1)^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right] + \frac{2cA^3}{3C^3}\sqrt{(kk+1)} - \frac{2\omega c}{3}\sqrt{(kk+1)}$ doit être poſitif, c'eſt-à-dire, qu'il faut que $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$ ſoit $>$ ou $= \frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C^3}$. Or la premiere de ces deux quantités eſt $= \frac{2}{3}$ lorſque $k = 0$, puiſqu'elle eſt égale à l'attraction $\frac{2c}{3}$ de la ſphere diviſée par $c\sqrt{(kk+1)} = c$; & lorſque $k = \infty$, cette même quantité devient $\frac{90^\circ}{k}$, c'eſt-à-dire, infiniment petite ou zéro. Donc ſi $m > 1$, & que $\frac{2\omega}{3}$

$-\frac{2A^3}{3C'^3}$ ſoit $> \frac{2}{3}$, ou en général ſi m eſt $>$ ou < 1, & que $\frac{2m}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ ſoit plus grand que la plus grande valeur de $\frac{(k+1)ATk-k}{k^3}$, l'attraction à l'équateur ſera négative, & la ſolution ſera illuſoire (*g*).

38. Il faut maintenant examiner, avant que d'aller plus loin, s'il peut y avoir des valeurs de $\frac{A^3}{C'^3}$ telles que la courbe $R'KN'Q$ ceſſe d'avoir une ordonnée égale à un *maximum*, ou pour parler plus exactement, ceſſe d'avoir des tangentes parallèles à l'axe. Pour cela il ſuffit que la différence de cette ordonnée ſoit toujours négative. Or en mettant pour m^2 ſa valeur k^2+1, on trouvera que cette différence eſt $-\frac{2.4A^3kdk}{3C'^3(k^2+1)^2} + \frac{(k^2+3)dk}{(kk+1)k^3} + ATk \times \left(\frac{-9-k^2}{k^4}\right) \times dk + \frac{6dk}{k^3}$; d'où il réſulte, en mettant $\frac{kdk}{k}$ ou $\frac{mdm}{k}$ au lieu de dk, que ſi $(k^2+1)^2 \times \left[\frac{(k^2+3)}{(k^2+1)k^4} + ATk \times \left(\frac{-9-k^2}{k^5}\right) + \frac{6}{k^4}\right] - \frac{2.4A^3}{3C'^3}$ eſt négatif, la différentielle précédente ſera par-tout négative. Or il eſt aiſé de voir que la quantité dont il s'agit peut être toujours négative. Car ſi la ſomme des termes affectés de k eſt négative, le tout ſera négatif; ſi elle eſt poſitive,

(*g*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

pourvû qu'elle ne ſoit pas infinie, on pourra toujours ſuppoſer $-\frac{2 \cdot 4 A^3}{3 C^3}$ aſſez grand pour que le tout ſoit négatif. Or cette quantité eſt $= (k^2+1)^2 \times \frac{9+k^2}{k^5} \times \left[-4Tk + \frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}\right]$, comme il eſt aiſé de le conclure des calculs du Mém. précéd. p. 51, *art.* 17; de plus, cette derniere quantité, lorſque k eſt $= 0$ ou infiniment petite eſt $= (Mém.\ précéd.$ p. 51, *art.* 19) $\frac{9}{k^5} \times \left(\frac{k^5}{5} + \frac{7k^5}{27}\right)$, c'eſt-à-dire, poſitive & finie, & lorſque $k = \infty$, elle eſt $= k \times \left[-90^\circ + \frac{7}{k}\right] = -90^\circ . k$, c'eſt-à-dire, infinie & négative. Donc puiſqu'elle eſt poſitive & finie quand k eſt infiniment petite, & infinie & négative quand k eſt infinie, elle n'eſt nulle part infinie & poſitive, & elle paſſe par zéro, en allant du poſitif au négatif, enſorte qu'il n'y a point de quantité finie & poſitive, telle qu'elle ſoit, qui ne puiſſe être ſuppoſée égale ou plus grande que quelqu'une de ſes valeurs poſitives.

39. Soit en général la quantité de l'article précédent $= (k^2+1)^2 \times \sigma = p$, s' ſa plus grande valeur poſitive (h) qui répond à quelque valeur finie de k; ſi $\frac{4A^3 \cdot 2}{3C^3}$ eſt plus grand que s', il eſt clair que $-\frac{4A^3 \cdot 2}{3C^3} + p$ ſera

(h) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

négatif, & qu'ainſi $-\frac{4A^3 \cdot 2}{3(kk+1)^2} + \frac{\varepsilon}{(k^2+1)^2}$ le ſera, donc $-\frac{2 \cdot 4A^3}{3C'^3(k^2+1)^2} + \frac{(k^2+3)}{(k^2+1)k^4} + ATk \times \left(\frac{-9-k^2}{k^5}\right) + \frac{6}{k^4}$ ſera négatif, puiſque les trois derniers termes ne ſont autre choſe que $\frac{-\varepsilon}{(k^2+1)^2}$ ou σ.

40. Il eſt clair encore que ſi $\frac{2 \cdot 4A^3}{3C'^3}$ eſt égal ou $< s'$, il y aura quelque valeur de k, qui donnera $\frac{2 \cdot 4A^3}{3C'^3}$ égale à quelqu'une des valeurs de s; d'où il réſultera que $-\frac{2 \cdot 4A^3}{3C'^3} + s(k^2+1)^2 \times \sigma = 0$; & par conſéquent $-\frac{2 \cdot 4A^3}{3C'^3(k^2+1)^2} + \sigma = 0$. Donc en ce dernier cas la différence de l'ordonnée de la courbe $R'KNQ$ pourra être $= 0$. Donc en ce cas il y aura au moins un point où la tangente ſera parallèle à l'axe, en allant depuis le point R' juſqu'à l'infini vers Q.

41. Donc ſi $\frac{4A^3}{3C'^3} = \text{ou} < \frac{s'}{2}$, la courbe aura au moins un point entre R' & Q, où la tangente ſera parallèle à l'axe; au contraire & par la même raiſon ſi $\frac{4A^3}{3C'^3} = \frac{s'}{2}$, il n'y en aura point, au moins entre R' & Q.

42. Si donc $\frac{4A^3}{3C'^3}$ eſt $> \frac{s'}{2}$, les ordonnées iront toujours en diminuant depuis R' juſqu'en Q à l'infini.

43. Voyons maintenant ce qui arrivera depuis R' jusqu'en L, c'eſt-à-dire, dans quel cas les ordonnées iront toujours en augmentant depuis R' juſqu'en L.

44. Il faut d'abord pour cela que $\frac{4A^3}{3C^3m^2} + \frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}$ ſoit poſitif, c'eſt-à-dire, que $\frac{4A^3}{3C^3}$ ſoit $> R$ (*art.* 23). Il faut en ſecond lieu que la différence de cette quantité ſoit toujours négative, c'eſt-à-dire, que $-\frac{4A^3 \cdot 2mdm}{3C^3m^4} + d\left[\frac{(k^2+3)ATk-3k}{k^3}\right]$ ſoit négatif, & par conſéquent (*art.* 38) que $\frac{2 \cdot 4A^3}{3C^3}$ ſoit $>$ que $(k^2+1)^2 \times \frac{9+k^2}{k^3} \times \left[-ATk + \frac{7k^3+9k}{(1+k^2)(9+k^2)}\right]$; c'eſt-à-dire, en mettant pour $\frac{ATk}{k}$ ſa valeur $\frac{1}{2k\sqrt{-1}}$ log. $\left(\frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}\right)$ ou $\frac{1}{2\sqrt{(1-mm)}}$ × log. $\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$, que $\frac{2 \cdot 4A^3}{3C^3}$ doit être $> m^4 \times \frac{8+m^2}{(m^2-1)^2} \times \left[-\frac{1}{2\sqrt{(1-mm)}} \times \log. \left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) + \frac{7m^2+2}{m^2 \times (8+m^2)}\right]$. Or 1°. lorſque $m = 1$, cette quantité devient $\frac{8}{3 \cdot 5}$, c'eſt-à-dire, réelle & poſitive; car lorſque $m = 1$, l'ordonnée $= \frac{4k^2}{3 \cdot 5}$, & ſa différence $= \frac{8kdk}{3 \cdot 5} = \frac{8mdm}{3 \cdot 5}$, quantité qui étant diviſée, comme

me elle le doit être ici, par $\frac{(k^2+1)^2}{kdk}$, devient $\frac{8}{3\cdot 5}$ lorſque $m=1$ ou $k=0$. C'eſt d'ailleurs ce qu'on peut voir aiſément par les calculs de l'*art.* 38, puiſque la quantité $\frac{9}{k^5}\times\left(-\frac{k^5}{5}+\frac{7k^5}{27}\right)$ qui eſt la valeur de celle dont il s'agit ici, lorſque $k=0$ ou $m=1$, eſt $=\frac{8}{3\cdot 5}$; 2°. quand $m=0$, la quantité dont il s'agit devient $8\times\left[-\frac{m^4}{2}\log.\frac{4}{mm}+\frac{2m^2}{8}\right]$ laquelle eſt $=0$; car puiſque (*art.* 8) $m\log.\frac{4}{mm}$ ou $2m\log.\frac{2}{m}$ eſt une quantité infiniment petite lorſque $m=0$, donc à plus forte raiſon $m^4\log.\frac{4}{mm}$ eſt auſſi $=0$, lorſque $m=0$. Donc la premiere valeur de la quantité dont il s'agit, c'eſt-à-dire, la valeur qui répond à $m=1$, ſera poſitive & finie, & la derniere, celle qui répond à $m=0$, ſera $=0$. Donc toutes les valeurs de cette quantité ſeront finies, ſoit poſitives, ſoit négatives. Donc (*art.* 39) nommant p cette quantité variable, il ſera toujours poſſible de ſuppoſer à $\frac{A^3}{C^3}$ une valeur telle que $-\frac{2\cdot 4A^3}{3C^3}+p$ ſoit négatif, quelque valeur qu'on donne à p. Donc en ce cas les ordonnées de la courbe $R'M'HL$ de la Fig. 6, iront en augmentant depuis R' juſqu'en L, comme on le voit dans la Fig. 7.

45. Donc ſi dans ce cas on ſuppoſe $\frac{2\omega}{3}-\frac{2A^3}{3C^3}$

positif, le problême n'aura qu'une solution ; & cette solution sera même illusoire, si $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ est tel que l'attraction à l'équateur soit négative, c'est-à-dire, (*art.* 37) si $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ est $>$ que la plus grande valeur de $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^3}$ (*i*).

46. Donc si $\frac{A^3}{C'^3}$ est tel que les ordonnées de la courbe $LR'Q$ (Fig. 7) aillent toujours en diminuant de L vers Q & soient toujours positives, & qu'en même-temps $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ soit positif, il n'y aura de vraie solution possible que dans le cas où $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ ne sera pas plus grand que l'unité, qui est (*Note g*) la plus grande valeur de $\frac{(k^2+1)ATk-k}{k^3}$; ce qui donne la limite de ω, $\frac{A^3}{C'^3}$ étant supposé donné, & tel que les ordonnées de la courbe $LR'Q$ aillent toujours en diminuant depuis ∞ jusqu'à zéro.

47. On vient de voir qu'il faut que $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ ne soit pas plus grand que $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$, k étant la valeur qui donne la solution du problême. Or

(*i*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

$\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3} = \frac{(k^2+3)ATk}{k^3} - \frac{3}{k^2} + \frac{4A^3}{3C'^3(k^2+1)}$.

Donc il faut que $\frac{2ATk-2k}{k^3} + \frac{4A^3}{3C'^3(k^2+1)}$ ſoit $= 0$ ou négatif; ce qui donnera (comme il eſt aiſé de le voir) l'attraction à l'équateur poſitive. Il faut donc que $\frac{(kk+1)(k-ATk)}{k^3}$ ſoit égal ou plus grand que $\frac{2A^3}{3C'^3}$; or lorſque $k = 0$, la premiere de ces quantités $= \frac{1}{3}$, & $= 1$ lorſque $k = \infty$, & enfin, lorſque $k^2 = -1$, ou $m = 0$, elle eſt $= \frac{m^2}{-1} \times (1 - \frac{1}{2}\log. \frac{4}{mm})$, quantité qui eſt $= 0$. De plus, il n'eſt pas difficile de voir que cette quantité va toujours en augmentant depuis $m = 0$ juſqu'à $m = \infty$; car ſa différence $-\frac{2dk}{k^3} - \frac{dk}{k^3} + ATk \times \left(\frac{dk}{k^2} + \frac{3dk}{k^4}\right)$, ou ce qui revient au même, $\frac{mdm}{k} \times \left(-\frac{3}{k^3} + \frac{ATk}{k^4} \times [3+k^2]\right)$ eſt poſitive (*Note g*); ſoit que k^2 ſoit négatif ou non (k). Donc ſi $\frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt > 1, qui eſt la plus grande valeur poſſible de $\frac{(k^2+1)}{k^3} \times (k - ATk)$, la ſolution ſera illuſoire; & en effet, il eſt viſible que l'attraction au pole ſera pour lors négative, puiſque

(k) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

(*hyp.*) quelque valeur qu'on donne à k, $\frac{(k^2+1)(k-ATk)}{k^3}$ ſera $< \frac{2A^3}{3C'^3}$.

48. Donc il faut, dans les hypothèſes précédentes, que $\frac{2A^3}{3C'^3}$ ſoit $=$ ou < 1, pour que la ſolution ne ſoit pas illuſoire; & il faut de plus (*art.* 46) que $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$, ſuppoſé poſitif, ſoit $<$ que l'unité.

49. Il eſt donc viſible que ſi on ſuppoſe $\frac{2A^3}{3C'^3} > 1$; la ſolution ſera illuſoire; & on peut obſerver qu'indépendamment de cette raiſon purement mathématique; le problême ſeroit encore impoſſible par une raiſon phyſique; car la ſolution (enviſagée quant au ſimple côté phyſique) demande même que A ſoit $< C'$, autrement la Planete attirée ſe trouveroit enfermée dans la Planete attirante. Il faut même que A ne ſoit pas plus grand que $C' - a$ ou $C' - \frac{a}{(kk+1)^{\frac{1}{3}}}$, a étant le demi-axe du ſphéroïde, & α le rayon d'une ſphere égale; rayon qui doit être tel que $\frac{\alpha}{(kk+1)^{\frac{1}{3}}} = a$ (*Mémoire précédent*, §. II, pag. 54, *art.* 24).

50. Donc ſi $\frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt > 1, la ſolution ſera illuſoire quand même la parallèle à l'axe AT menée à la diſ-

tance $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$, couperoit la courbe qui a pour ordonnée $\frac{2A^3}{3C'^3 mm} + \frac{(k^3+3)ATk - 3k}{k^3}$; les valeurs de k données par cette ſolution ne produiſant alors que des attractions négatives au pole & à l'équateur.

51. Ce n'eſt pas tout encore. Lorſque $\frac{2A^3}{3C'^3}$ ſera < 1, il faudra de plus que la valeur trouvée de k ſoit telle que $\frac{(k^3+1)(k-ATk)}{k^3}$ ſoit $> \frac{2A^3}{3C'^3}$; il faudra donc que la valeur de $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ ſoit telle, que la valeur de k qui en réſultera, ſoit aſſujettie à cette condition.

52. Si $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3} = \frac{4A^3}{3C'^3}$; c'eſt-à-dire, ſi $\frac{2\omega}{3}$ eſt $= \frac{2A^3}{C'^3}$ ou $\omega = \frac{3A^3}{C'^3}$; on aura $k = 0$, ou $m = 1$. En effet, il eſt aiſé de voir par ce qui précéde, qu'en ſuppoſant k^2 infiniment petit, les quantités affectées ſeulement de k dans le ſecond membre de l'équation de l'*art.* 31, ſont $= \frac{4k^2}{3 \cdot 5}$, c'eſt-à-dire, nulles lorſque $k = 0$, ou $m = 1$. D'où il s'enſuit que ce ſecond membre ſe réduit à $\frac{4A^3}{3C'^3}$. Donc puiſque le premier membre $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt ſuppoſé $= \frac{4A^3}{3C'^3}$, il s'enſuit que la valeur de $k = 0$, ou de $m = 1$, ſatisfait au problême. Donc en ce cas la figure reſte ſphérique, ou du moins

on peut la ſuppoſer telle, quoique le problême puiſſe avoir encore d'autres ſolutions, comme on le va voir dans l'article ſuivant.

53. En effet, il réſulte de l'*art.* 32, que ſi $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3} = \frac{4A^3}{3C'^3}$, c'eſt-à-dire, $\frac{2\omega}{3} = \frac{2A^3}{C'^3}$, & que de plus $\frac{4A^3}{3C'^3} < PM$ (Fig. 6) & $\frac{2A^3}{3C'^3} < R'$ (*art.* 29), il y aura outre $m = 1$, deux valeurs de m, dont l'une ſera < 1, & l'autre plus grande que 1. Mais ni l'une ni l'autre de ces deux valeurs ne donnera un équilibre ferme.

54. Mais ſi dans cette même hypothèſe de $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3} = \frac{4A^3}{3C'^3}$, la valeur de $\frac{A^3}{C'^3}$ étoit telle que les ordonnées depuis R' (Fig. 7) juſqu'en L allaſſent en augmentant, & au contraire en diminuant depuis R' juſqu'en Q; le problême n'auroit alors abſolument qu'une ſolution poſſible, celle de $m = 1$.

55. Quoique dans les ſolutions précédentes, on ait ſuppoſé que m puiſſe avoir indifféremment toutes ſortes de valeurs, cependant il faut remarquer qu'on ne doit pas ſuppoſer le ſphéroïde infiniment allongé, c'eſt-à-dire, $m = 0$, parce qu'alors la ſolution ſeroit illuſoire; car la ſolution générale (*Mém. précéd.* §. II) eſt appuyée ſur l'hypothèſe que a ſoit très-petit par rapport à C', ainſi que le rayon de l'équateur ma; & que par

conſéquent le ſphéroïde n'ait qu'un allongement ou un applatiſſement fini (*l*).

56. On remarquera de plus que la plus grande valeur de PM (Fig. 6) & la plus grande valeur de R' (*art.* 53) étant finies, puiſque leur expreſſion ne renferme que des quantités finies, il faudroit pour que $\frac{4A^3}{3C'^3}$ fût $=$ ou $>$ PM, & $\frac{2A^3}{3C'^3} > R'$, que $\frac{A}{C'}$ fût fini, c'eſt-à-dire, que le rayon du corps attirant S fût comparable à ſa diſtance C' du centre de la Planete attirée.

57. Or, comme dans toutes les ſolutions du problême, qui peuvent être applicables aux uſages aſtronomiques, ω & $\frac{A^3}{C'^3}$ ſont fort petits, il eſt clair que la théorie précédente ſera très-ſimplifiée; c'eſt-à-dire, que $\frac{4A^3}{3C'^3}$ ſera toujours $< PM$; que $\frac{2A^3}{3C'^3}$ ſera toujours $< R'$; & qu'enfin $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ ſera $<$ que l'unité. Ainſi la ſolution ſera toujours poſſible. Il y a plus. On aura toujours plus d'une ſolution, ſavoir 1°. deux ſolutions ſi $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt négatif; & ces deux ſolutions donneront $m < 1$; 2°. trois ſolutions ſi $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt poſitif; deſquelles la troiſiéme donnera $m > 1$.

(*l*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

3°. Enfin, deux ſolutions ſi $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3} = 0$. De ces différentes ſolutions, il n'y aura dans tous les cas que celle qui donne m preſque égale à l'unité, d'où il réſultera un équilibre ferme.

58. On peut auſſi réſoudre le problême qui fait l'objet de ce Mémoire, par une autre méthode qui pourra jetter encore plus de jour ſur certains points de la ſolution. On a (*art.* 19) $\frac{2(k - ATk)}{k^3} - \frac{4A^3}{3C'^3 mm}$, qui n'eſt autre choſe que l'attraction au pole, diviſée par la quantité toujours réelle mm ou $kk + 1$, égale à $\frac{(kk+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2} + \frac{2A^3}{3C'^3} - \frac{2\omega}{3}$, qui n'eſt autre choſe que l'attraction à l'équateur, diviſée par m ou $\sqrt{(kk+1)}$. Il faut donc, en prenant m pour abſciſſe, conſtruire les deux courbes dont ces deux quantités ſont les ordonnées; les points où ces courbes ſe couperont, donneront les valeurs de m qui réſoudront le problême. Mais il faut remarquer qu'afin que la ſolution ne ſoit point illuſoire, les points de ſection des deux courbes doivent être au-deſſous de l'axe, c'eſt-à-dire, du côté des ordonnées poſitives, & non pas au-deſſus, puiſqu'autrement l'ordonnée commune étant négative à l'endroit de la ſection, l'attraction, tant au pole qu'à l'équateur, ſeroit négative, & la Planete ſe diſſiperoit.

59. De-là il s'enſuit 1°. que ſi $\frac{4A^3}{3C'^3}$ eſt plus grand

que

que la plus grande valeur de $\frac{2(k^2+1)(k-ATk)}{k^3}$, c'eſt-à-dire, ſi $\frac{2A^3}{3C^3} > 1$, alors l'ordonnée de la premiere courbe étant toujours négative, la ſolution ſera illuſoire. 2°. Que ſi $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C^3}$ eſt > que la plus grande valeur de $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$, l'ordonnée de la ſeconde courbe ſera auſſi toujours négative, & que par conſéquent la ſolution ſera encore illuſoire; ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé ci-deſſus (*art.* 45, 46 & 47). 3°. La quantité $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$ eſt $= 1$ lorſque $m = 0$, $= \frac{2}{3}$ lorſque $m = 1$ (*Note g*), & $= 0$ lorſque $m = \infty$; & la quantité $\frac{2(kk+1)}{k^3} \times (k - ATk)$ eſt $=$ (*Note k* & *art.* 47) à zéro lorſque $m = 0$, à $\frac{2}{3}$ lorſque $m = 1$, & à 2 lorſque $m = \infty$; de plus, la différence de la quantité $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$ eſt toujours négative, de ſorte que cette quantité va toujours en diminuant (*Note g*). C'eſt pourquoi ſi on conſtruit la courbe *NMQ*, Fig. 8, dont les ordonnées ſoient $= \frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$, cette courbe aura pour premiere ordonnée $AN = 1$, répondante à $m = 0$, & elle ira toujours en s'approchant de ſon axe *AT*,

qui ſera ſon aſymptote. Donc ſi on fait $NL = \frac{2u}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$, & qu'on trace la courbe LFR parallèle à la courbe NMQ, enſorte que RM ſoit par-tout égale & parallèle à LN, les ordonnées de cette nouvelle courbe ſeront égales à $\frac{(kk+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2} + \frac{2A^3}{3C'^3} - \frac{2u}{3}$. Par la même raiſon, ſi l'on conſtruit la courbe qui a pour ordonnée $\frac{2(k - ATk)}{k^3}$, cette courbe aura d'abord ſon ordonnée au point A (Fig. 9) où $m = 0$, égale à $\frac{2}{k^2} - \frac{2}{2k^2\sqrt{(1-mm)}} \log. \frac{4}{mm} = -2 + \log. \frac{4}{mm}$, c'eſt-à-dire, infinie & poſitive; & lorſque $m = \infty$, l'ordonnée ſera $\frac{2}{k^2} = 0$; d'où il s'enſuit que la courbe a pour aſymptotes les deux lignes AZ & AT, perpendiculaires l'une à l'autre. Donc ſi on retranche des ordonnées de cette courbe la quantité $\frac{4A^3}{3C'^3 mm}$ ou $\frac{4A^3}{3C'^3(k^2+1)}$ laquelle eſt évidemment plus grande que $\log. \frac{4}{mm}$ lorſque $m = 0$, & $< \frac{2}{k^2}$ lorſque $m = \infty$, pourvû que $\frac{2A^3}{3C'^3}$ ſoit < 1, la nouvelle courbe $O'P'X'$ ainſi formée (Fig. 10) aura pour aſymptotes l'ordonnée négative & infinie AZ', & l'axe AT, & coupera ſon

axe AT en quelque point V, pour s'en éloigner enſuite juſqu'en C, & de-là s'en rapprocher à l'infini vers T.

60. Si donc on conſtruit ſur un même axe AT (Fig. 11), les courbes LFR de la Fig. 8, & $O'P'X'$ de la Fig. 10, & que dans le cas même où chacune de ces deux courbes auroit des ordonnées poſitives, l'interſection P' (Fig. 11) ſe faſſe du côté des ordonnées négatives, la ſolution ſera illuſoire.

61. Or c'eſt ce qui arrivera évidemment dans pluſieurs cas. Par exemple, ſi la différence AL (Fig. 8) de l'unité & de $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt extrêmement petite, & qu'en même temps $\frac{2A^3}{3C'^3}$ ſoit preſque $= 1$, quoiqu'un peu plus petit, le point F ſera très-près de A; & au contraire dans la Fig. 10, le point V qui donne $\frac{2(k - ATk)(kk+1)}{k^3} = \frac{4A^3}{3C'^3}$, ſera très-éloigné de A; enſorte que l'interſection des deux courbes ſe fera du côté négatif.

62. Suppoſant donc $\frac{2A^3}{3C'^3} < 1$, enſorte que la courbe $O'P'X'$ (Fig. 11) coupe ſon axe AT en quelque point V; ſi la valeur de $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt plus grande que la valeur de $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$ qui répond à $m = AV$, la ſolution ſera illuſoire.

63. Il eſt à remarquer encore que ſi $\frac{2a}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ eſt négatif, le point L dans la Figure 8 ſera vers L' de l'autre côté de N par rapport à A, & la courbe LFR ne coupera point ſon axe; toutes les ordonnées étant poſitives. Donc en ce cas s'il y a interſection des deux courbes, elle ſera du côté des ordonnées poſitives, & il y aura une ou pluſieurs ſolutions poſſibles. Je dis *s'il y a interſection des deux courbes*; car il eſt évident qu'il n'y auroit point d'interſection, ſi la plus grande des ordonnées poſitives de la courbe $O'P'X'$ (Fig. 10 & 11) étoit $< \frac{2A^3}{3C'^3} - \frac{2a}{3}$ (m). Ce qui s'accorde avec l'*art.* 32.

64. Si pour plus de généralité on ſuppoſoit comme dans l'*art.* 41 du §. II du Mém. préc. p. 63, l'attraction en partie proportionnelle à la raiſon inverſe du quarré de la diſtance, & en partie à la raiſon directe ſimple de la diſtance, il eſt aiſé de voir (*art.* 44 & 45 *du Mémoire cité*) que l'équation propre à cette hypothèſe ne différeroit de celle qui a été diſcutée dans ce Mémoire-ci, qu'en ce qu'on auroit au lieu de $\frac{4A^3}{3C'^3}$, $\frac{4A^3}{3C'^3} - \frac{2A^3}{3C'^3} - \frac{2a^3}{3C'^3}$, & au lieu de $\frac{2A^3}{3C'^3}$, $\frac{2A^3}{3C'^3} - \frac{2A^3}{3C'^3} + \frac{2a^3}{3C'^3}$. Ainſi en mettant la premiere de ces

(m) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

quantités au lieu de $\frac{4A^3}{3C^3}$, & la ſeconde au lieu de $\frac{2A^3}{3C^3}$ dans les propoſitions précédentes, on en tirera des concluſions analogues pour le cas dont il s'agit ici. Il eſt inutile d'entrer ſur cela dans un plus grand détail, ainſi que de développer pluſieurs autres conſéquences qui réſultent de la Théorie précédente, & que les Géometres pourront en déduire aiſément.

REMARQUES
SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

(*a*) *Art.* 3. ON pourroit croire d'abord qu'il eſt permis auſſi d'écrire $-\frac{1}{\sqrt{(1-mm)}}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{-1}.\sqrt{(mm-1)}}$, parce que $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, & qu'ainſi $\frac{1}{\sqrt{-1}.\sqrt{(mm-1)}} = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(mm-1)}} = -\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}.\sqrt{(1-mm)}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-mm)}}$; ce qui donneroit une valeur de $\frac{ATk}{k}$, de ſigne différent de celle que nous avons trouvée. Mais il eſt aiſé de s'aſſurer que cette valeur ſeroit fautive ; car en cherchant directement l'attraction, tant à l'équateur qu'au pole, on trouve que cette quantité $\frac{ATk}{k}$ vient de l'intégrale d'une quantité de cette forme $\frac{kdu}{k(1+kkuu)}$, ou plus ſimplement $\frac{du}{1+kkuu}$. Suppoſons maintenant k^2 néga-

tif & $= -k'^2$, enſorte que $k^2 = mm - 1$ lorſque m eſt < 1, & $k'^2 = 1 - mm$, on aura $\frac{du}{1+kkuu} = \frac{du}{1-k'k'uu} = \frac{k'du}{k'(1-k'k'uu)}$, dont l'intégrale eſt $\frac{1}{2k'} \times \log.\left(\frac{1+k'u}{1-k'u}\right)$, laquelle devient, lorſque $u = 1$, $\frac{1}{2k'} \times \log.\left(\frac{1+k'}{1-k'}\right) = \frac{1}{2\sqrt{(1-mm)}} \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$. En conſéquence de cette remarque, l'attraction au pole étant $\frac{2ca(kk+1)}{k^3}(k - ATk)$ (*), & l'attraction à l'équateur $\frac{ca(kk+1)^{\frac{1}{2}}}{k^3} \times ATk - \frac{ca\sqrt{(kk+1)}}{k^2}$, dans un ſphéroïde applati, elles ſeront dans un ſphéroïde allongé $\frac{2ca(kk+1)}{k^2} - \frac{2ca}{2k^2\sqrt{(1-mm)}} \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$ pour le pole, & $cam^3 \times \frac{1}{2k^2\sqrt{(1-mm)}} \times \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \frac{cam}{k^2}$ pour l'équateur, k^2 étant toujours $= mm - 1$, ſoit que m ſoit $>$ ou < 1.

Ces deux valeurs que nous venons de donner de l'attraction au pole & à l'équateur dans un ſphéroïde allongé dont le demi-axe $= 1$, & le rayon de l'équateur $= m$, s'accordent parfaitement avec celles que M. Maclaurin a trouvées dans ſa Diſſertation ſur le Flux & Reflux de

(*) Voyez le Mémoire précédent, §. II, art. 5.

la Mer, ce qu'il n'eſt pas inutile de remarquer. Car il trouve (*Prop.* 2) que l'attraction du ſphéroïde au pole eſt à l'attraction d'une ſphere décrite du rayon 1, c'eſt-à-dire, à $\frac{2c}{3}$, comme $3m^2 \times [\frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \sqrt{(1-mm)}]$ eſt à $(1-mm)^{\frac{1}{2}}$, en mettant dans les formules de M. Maclaurin 1 pour a, m pour b, & $\sqrt{(1-mm)}$ pour c; d'où il s'enſuit que cette attraction eſt $\frac{2cm^2}{(1-mm)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-m^2)}}\right) = \frac{2cm^2}{1-m^2}$, comme il réſulte de nos calculs.

A l'égard de l'attraction à l'équateur, M. Maclaurin trouve (*Prop.* 3) qu'elle eſt à l'attraction d'une ſphere du rayon m (c. à. d. à $\frac{2cm}{3}$), comme $\sqrt{(1-mm)} - \frac{m^2}{2}\log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$ eſt à $\frac{2}{3}(1-mm)^{\frac{3}{2}}$; d'où il s'enſuit que cette attraction eſt égale à $\frac{cm}{(1-mm)^{\frac{1}{2}}} \times [\sqrt{(1-mm)} - \frac{m^2}{2}\log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)] = \frac{cm}{1-mm} - \frac{cm^3}{(1-mm)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$; ce qui s'accorde avec notre formule, en faiſant $a = 1$.

J'ai déja remarqué ailleurs (*Recherches ſur le Syſtême du Monde*, art. 268) l'équivoque qui peut réſulter de l'emploi de la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$ dans des quantités intégrables par logarithmes ou par exponentielles imaginaires;

imaginaires; le seul moyen de lever cette équivoque, est de se rendre attentif au résultat que doivent donner les signes.

Par exemple, qu'on propose à intégrer $\frac{du}{1+uu}$, on aura par transformation $\frac{du}{1+uu} = \frac{du}{(1+u\sqrt{-1})(1-u\sqrt{-1})}$ $= \frac{A\,du\sqrt{-1}}{1+u\sqrt{-1}} + \frac{A\,du\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}}$, A étant une indéterminée, & on trouvera facilement $2A\sqrt{-1} = 1$, ou $A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$; d'où $\int\frac{du}{1+uu} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ log. $\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}}\right)$, comme tout le monde sait.

Supposons maintenant $u^2 = -u'^2$, ensorte que $u'\sqrt{-1} = u$, on aura $\int\frac{du}{1+uu} = \int\frac{du'\sqrt{-1}}{1-u'^2} = \sqrt{-1}$ $\times\int\frac{du'}{1-u'^2} = \sqrt{-1}\times\frac{1}{2}$ log. $\left(\frac{1+u'}{1-u'}\right)$. Or à cause de $u'\sqrt{-1} = u$, on aura $u' = \frac{u}{\sqrt{-1}} = -u\sqrt{-1}$; donc on aura $\sqrt{-1}\times\frac{1}{2}$ log. $\left(\frac{1+u'}{1-u'}\right) = \sqrt{-1}\times\frac{1}{2}$ log. $\left(\frac{1-u\sqrt{-1}}{1+u\sqrt{-1}}\right) = -\frac{\sqrt{-1}}{2}$ log. $\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}}\right) =$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ log. $\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}}\right)$ comme dans la premiere formule. On remarquera de plus que l'équation $u^2 = -u'^2$ donne encore $u'^2 = -u^2$, & par conséquent aussi $u' = u\sqrt{-1}$, & $u = \frac{u'}{\sqrt{-1}}$; ce qui

donneroit encore $\int\frac{du}{1+uu} = \int\frac{du'}{(1-u'^2)\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+u'}{1-u'}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+u\sqrt{-1}}{1-u\sqrt{-1}}\right)$.

On voit par ce double calcul, dans l'hypothèse de $u'\sqrt{-1} = u$, & dans celle de $u' = u\sqrt{-1}$, qui réſultent également de $u^2 = -u'^2$, ou $u'^2 = -u^2$, que le réſultat de la valeur de $\int\frac{du}{1+uu}$ eſt le même de part & d'autre, & conforme à celui que donne la premiere méthode. Il faut ſeulement obſerver que quand on aura ſuppoſé $u'\sqrt{-1} = u$, il faudra mettre pour u' dans l'intégrale ſa valeur $\frac{u}{\sqrt{-1}}$ ou $-u\sqrt{-1}$, & non pas ſon autre valeur $u\sqrt{-1}$; & réciproquement quand on aura ſuppoſé $u' = u\sqrt{-1}$, ou $u = \frac{u'}{\sqrt{-1}}$, il faudra mettre à la place de u' dans l'intégrale, ſa valeur $u\sqrt{-1}$, & non pas ſon autre valeur $-u\sqrt{-1}$.

Par une raiſon ſemblable, puiſque $k = \sqrt{(mm-1)}$ & qu'au lieu de $\sqrt{(mm-1)}.\sqrt{-1}$ on écrit $\sqrt{(1-mm)}$ dans l'expreſſion de la valeur ATk affectée de logarithmes imaginaires, il s'enſuit que dans le dénominateur $\frac{1}{\sqrt{-1}.\sqrt{(mm-1)}}$ de la valeur de $\frac{ATk}{k}$, il faudra écrire $\frac{1}{\sqrt{(1-mm)}}$ au lieu de $\frac{1}{\sqrt{-1}.\sqrt{(m^2-1)}}$; & non pas $-\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(mm-1)}} = -\frac{1}{\sqrt{(1-mm)}}$. Car

ſoit $mm-1=-m'^2$, on aura $\sqrt{(mm-1)}.\sqrt{-1}=\sqrt{(-m'^2)}.\sqrt{-1}=$ indifféremment $m'\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, ou $-m'\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, c'eſt-à-dire, indifféremment $-m'$ ou $+m'$. Or puiſque de ces deux valeurs on prend la derniere pour l'expreſſion de $\sqrt{(m^2-1)}.\sqrt{-1}$, il s'enſuit qu'on ſuppoſe donc ici $\sqrt{(m^2-1)}=-m'\sqrt{-1}$ & non pas $+m'\sqrt{-1}$, & que par conſéquent $\frac{1}{\sqrt{-1}.\sqrt{(m^2-1)}}$ doit être ſuppoſé $=\frac{1}{\sqrt{-1}\times-m'\sqrt{-1}}=\frac{1}{m'}=\frac{1}{\sqrt{(1-m^2)}}$, en regardant $\sqrt{(1-m^2)}$ comme poſitif. Si on avoit ſuppoſé $\sqrt{(m^2-1)}=m'\sqrt{-1}$, on auroit eu log. $\left(\frac{1+\sqrt{(m^2-1)}.\sqrt{-1}}{1-\sqrt{(m^2-1)}.\sqrt{-1}}\right)=$ log. $\left(\frac{1-m'}{1+m'}\right)$, & $\frac{1}{\sqrt{-1}.\sqrt{(m^2-1)}}=\frac{1}{\sqrt{-1}\times m'\sqrt{-1}}=\frac{1}{-m'}=-\frac{1}{m'}$; & la valeur de $\frac{ATk}{k}$ auroit été $-\frac{1}{2m'}$ log. $\left(\frac{1-m'}{1+m'}\right)$ qui revient au même que la précédente $\frac{1}{2m'}$ log. $\left(\frac{1+m'}{1-m'}\right)$.

On voit donc que tous les réſultats s'accordent parfaitement, pourvû qu'on faſſe beaucoup d'attention aux ſignes des quantités imaginaires, & qu'après avoir ſuppoſé ces ſignes poſitifs par exemple, on ne les ſuppoſe pas enſuite négatifs dans la même quantité, ou réciproquement; ſuppoſition qui peut être tacite, ſans qu'on s'en apperçoive, comme on vient de le voir dans le calcul précédent, où $\sqrt{(m^2-1)}$ eſt ſuppoſé réellement

$= -m'\sqrt{-1}$ dans un des cas, & $+m'\sqrt{-1}$ dans l'autre ; ainſi il faut toujours retenir la valeur $-m'\sqrt{-1}$ pour celle de $\sqrt{(m^2-1)}$ dans le premier cas, & $m'\sqrt{-1}$ dans le ſecond, & non ſubſtituer d'abord $-m'\sqrt{-1}$ à $\sqrt{(m^2-1)}$ dans la quantité logarithmique, & enſuite $m'\sqrt{-1}$ à $\sqrt{(m^2-1)}$ dans celle qui eſt au dénominateur.

J'ai cru devoir m'étendre ſur l'objet de cette remarque, parce qu'il m'a paru propre à embarraſſer quelquefois, ou à faire commettre des fautes d'inadvertence dans les calculs.

On peut trouver par ce qui précéde le dénouement du paradoxe dont j'ai parlé ci-deſſus, & que j'ai expoſé dans l'*art.* 268 de mes *Recherc. ſur le Syſt. du Monde* ; ſavoir que $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, lorſque x eſt > 1, doit être ſuppoſé $= \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$. & non pas $\frac{dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(xx-1)}}$. En effet, $\sqrt{(xx-1)}$ pris poſitivement $= \sqrt{(1-xx)}$ pris poſitivement multiplié par $\sqrt{-1}$; donc $\sqrt{(1-xx)} = \frac{\sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}}$; donc $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$. On pourroit cependant ſuppoſer auſſi, à la rigueur, $\sqrt{(xx-1)} = \sqrt{(1-xx)} \times -\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{-1}}$; ou $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)}}$; mais alors il faut remarquer que l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}} =$ log.

$\left(\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}}\right)$ ſera $=\log.\left(\frac{x+\frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right)$, enſorte que l'intégrale totale eſt $\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{x+\frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right)$ $=-\sqrt{-1}\log.\left(\frac{x+\frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right)=\sqrt{-1}\log.$ $\left(\frac{-1}{x\sqrt{-1}+\sqrt{(1-xx)}}\right)=\sqrt{-1}\log.\left(\frac{x+\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{-1}}\right)$. Or cette derniere valeur réſulte de l'intégrale de $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{xx-1}}=\sqrt{-1}\log.\left(\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{\sqrt{-1}}\right)=$ $\sqrt{-1}\times\log.\left(\frac{x+\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{-1}}\right)$. Donc, &c.

Je ne voudrois donc pas avancer en général, & ſans aucune reſtriction, avec quelques Mathématiciens, que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=$ en général $-\sqrt{(ab)}$, & non pas $+\sqrt{(ab)}$; mais je dirai ſeulement que dès qu'on aura ſuppoſé dans un calcul $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{(ab)}$ ou ce qui revient au même $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$, & $\sqrt{-b}=\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$, il faudra dans toute la ſuite du calcul faire la même ſuppoſition, ſans quoi on tomberoit dans de faux réſultats. Quoique la ſuppoſition de $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ ſoit aſſez naturelle, $\sqrt{a}$ étant ſuppoſé poſitif, cependant cette ſuppoſition ne ſuit pas néceſſairement de la valeur de $\sqrt{-a}$, & on peut à la rigueur ſuppoſer auſſi $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times-\sqrt{-1}$, parce que cette ſuppoſition donne $-a=-a$, & que d'ailleurs tout ſigne radical eſt

censé avoir toujours $\pm$ au-devant de lui, enſorte que $\sqrt{-a}$ repréſente également, à la rigueur, les deux quantités $+\sqrt{-a} = +\sqrt{a} \times +\sqrt{-1}$, & $-\sqrt{-a} = -\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$. Pour le voir bien clairement, ſoit $a = cc$, on aura $\sqrt{a} = \sqrt{cc} = \pm c$, & par conſéquent $\sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \pm c\sqrt{-1}$. De même $\sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \pm e\sqrt{-1}$, en faiſant $b = ee$; donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \pm ec$. On peut conſidérer encore 1°. que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ peut être ſuppoſé $= \sqrt{(-a \times -b)} = \sqrt{ab} = \pm\sqrt{(ab)}$. 2°. Que $-a$ étant $= a \times -1$ ou $\frac{a}{-1}$; on peut ſuppoſer que $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, & qu'on peut au contraire ſuppoſer $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$; d'où il réſulteroit $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = +\sqrt{(ab)}$ auſſi bien que $-\sqrt{(ab)}$. On voit donc que tout dépend ici de la ſuppoſition primitive qu'on a faite ſur le ſigne des quantités radicales. Ceci n'empêche pas que le produit de $+\sqrt{-a}\,a$ par $-\sqrt{(-aa)}$ ne ſoit toujours & dans tous les cas $+aa$; ou plutôt cette vérité eſt la conſéquence néceſſaire de ce que nous venons de remarquer; parce que les deux radicaux étant ſuppoſés avoir des ſignes différens, ſi on fait $+\sqrt{-aa} = c\sqrt{-1}$, c étant poſitif ou négatif, on aura $-\sqrt{(-aa)} = -c\sqrt{-1}$, & par conſéquent $+\sqrt{-aa} \times -\sqrt{(-aa)} = c\sqrt{-1} \times -c\sqrt{-1} = cc = aa$.

(*b*) *Art.* 8. Si on doute que $\frac{\log. x}{x}$ ſoit $= 0$ lorſ-

que x eſt infini, il n'y a qu'à ſuppoſer dans la logarithmique AD, Fig. 12, l'ordonnée $CD = \frac{1}{x}$, & infiniment petite; on aura (en prenant AB pour l'unité) $BC = \log. \frac{1}{x}$ ou $\log. x$, abſtraction faite du ſigne; donc $\frac{\log. x}{x} = CD \times CB$, quantité infiniment petite, puiſque l'aire entiere & indéfiniment prolongée $ADCB$ n'eſt que finie, comme les Géometres le ſavent.

C'eſt ce qu'on peut d'ailleurs prouver d'une autre maniere, en conſidérant que ſi x eſt infiniment petit, ou ſimplement < 1, $\frac{dx}{x}$ eſt $< \frac{dx}{x^{1+\lambda}}$, λ étant une quantité poſitive, puiſque $x^{1+\lambda}$ eſt $< x$ dans cette hypothèſe; d'où il eſt clair que $\int \frac{-dx}{x}$ ou $\log. \frac{1}{x}$ eſt $< \frac{1}{\lambda x^{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}$ & à plus forte raiſon $< \frac{1}{\lambda x^{\lambda}}$; donc $\lambda x \log. \frac{1}{x} < x^{1-\lambda}$, & par conſéquent $x \log. \frac{1}{x}$ eſt infiniment petit, puiſqu'on peut ſuppoſer $\lambda < 1$.

De-là il s'enſuit que $\log. \frac{1}{x}$ (x étant infiniment petit) eſt néceſſairement $< \frac{1}{x}$, & même infiniment plus petit, & que par conſéquent on peut ſuppoſer $\log. \frac{1}{x} = \frac{1}{x^{\lambda}}$, λ étant une quantité < 1, mais qui ſera différente ſuivant la valeur de x.

On peut conſidérer encore 1°. que la logarithmique, à ſon extrémité infiniment éloignée, eſt perpendiculaire à ſon axe ou aſymptote, puiſque la ſoutangente eſt finie, & l'ordonnée infinie ; d'où il eſt clair qu'en ſuppoſant les ordonnées y parallèles à l'aſymptote, on peut, lorſque l'abſciſſe x' eſt devenue infinie, ſuppoſer y égale à une ſuite de termes de cette forme $a x^m$, &c. m étant un nombre plus petit que l'unité, afin que $dy = a m x'^{m-1} dx'$, &c. ſoit infiniment petit par rapport à dx', x' étant infinie. Donc puiſque y eſt ici = log. $\frac{1}{x} =$ log. x', ce qui donne $x = \frac{1}{x'}$, on aura x log. $\frac{1}{x} = \frac{a x'^m}{x'}$, &c. $= a x'^{m-1}$, &c. quantité infiniment petite, puiſque $x' = \infty$ & que $m < 1$.

On doit remarquer que non-ſeulement m log. $\frac{2}{m}$; mais en général m^p log. $\frac{a}{m^q}$ eſt une quantité infiniment petite lorſque m eſt infiniment petit, pourvû que p & q ſoient des nombres poſitifs & finis, entiers d'ailleurs ou rompus ; car ſi p eſt $> q$, enſorte que $p = q + r$, r étant un nombre poſitif, on aura m^p log. $\frac{a}{m^q} = m^{q+r}$ log. $\frac{a}{m^q} = m^r \times m^q$ log. $\frac{a}{m^q}$. Or m^q log. $\frac{a}{m^q}$ eſt infiniment petit, comme il eſt aiſé de le voir en faiſant $m^q = \frac{1}{x}$, donc à plus forte raiſon $m^r \times m^q$ log.

$\log. \frac{a}{m^q}$ ſera infiniment petit. Si p eſt $< q$, on ſera $\log. \frac{a}{m^q} = \log. a - q \log. m = \log. a - p \times \frac{q}{p} \log. m =$ $\log. a - \frac{q}{p} \log. m^p = \log. a + \frac{q}{p} \times \log. \frac{1}{m^p} =$ $\frac{q}{p} \log. a^{\frac{p}{q}} + \frac{q}{p} \log. \frac{1}{m^p}$, donc on aura $m^p \log. \frac{a}{m^q}$ $= m^p \times \frac{q}{p} \log. \left(\frac{a^{\frac{p}{q}}}{m^p}\right)$ & par conſéquent infiniment petit, au moins tant que p & q ſont finis.

De-là il s'enſuit (en ſuppoſant x infiniment petit) que $x \log. \frac{1}{x}$ eſt $= x^\omega$, ω étant une quantité qui n'eſt point $= 1$, mais qui en approche auſſi près qu'on voudra, en demeurant toujours plus petit. C'eſt ce qu'on peut prouver en conſidérant 1°. que puiſque $\log. \frac{1}{x}$ eſt infini, $x \log. \frac{1}{x}$, eſt infiniment plus grand que x. 2°. Que néanmoins puiſque $x \log. \frac{1}{x}$ eſt infiniment petit, $x \log. \frac{1}{x}$ doit être égal à une quantité x^ω, dans laquelle ω eſt < 1. 3°. Qu'enfin puiſque $\frac{x \log. x}{x^\rho}$ ou $\frac{x \log. \frac{1}{x}}{x^\rho}$ eſt toujours infiniment petit, ρ étant poſitif & < 1, on aura $x^{\omega - \rho}$ infiniment petit, & par con-

séquent $\omega - p$ positif. Donc puisque ω est < 1, & $p < 1$, ω peut être supposé aussi près de l'unité qu'on voudra, pourvû qu'il ne soit pas égal ni plus grand.

(c) *Art.* 10. Si on prenoit k & non pas m pour l'abscisse, la courbe SMO (Fig. 5) toucheroit son axe en S où $k = 0$; au lieu qu'elle le coupe sous un angle fini (*art.* 5, pag. 101) si les abscisses sont m. La raison de cette différence est facile à voir, en considérant que l'abscisse k étant infiniment petite, l'ordonnée correspondante $\frac{4k^2}{3 \cdot 5}$ est infiniment petite du second ordre; mais que si on prend pour abscisse $m = \sqrt{(1 + kk)} = 1 + \frac{kk}{2}$ lorsque k est infiniment petite, la différence de l'abscisse, & l'ordonnée, sont entr'elles dans le rapport fini de $\frac{1}{2}$ à $\frac{4}{3 \cdot 5}$, ou de 1 à $\frac{8}{3 \cdot 5}$; ce qui s'accorde avec l'*art.* 5 déja cité.

Dans le Mémoire précédent, §. II, nous avons pris k pour l'abscisse de la courbe SMO, parce que k est $= \sqrt{(mm - 1)}$, & que nous supposions $m > 1$. Mais ici, où m peut être < 1, il est nécessaire de prendre m & non pas k pour l'abscisse, parce que les valeurs de k seroient imaginaires, m étant < 1, quoique m fût réelle.

(d) *Art.* 11. Lorsqu'on fait abstraction du corps attirant S, & qu'on suppose l'attraction tout-à-la-fois en raison inverse du quarré de la distance, & directe de

la distance, on a (*Mém. préc.* §. II, p. 64, *art.* 44) pour l'attraction au pole, la quantité $\frac{2m^2c}{k^3}(k - ATk) + \frac{2a^3m^2c}{3C^3}$, qui est évidemment toujours positive, soit que k soit réel ou imaginaire, puisque cette attraction est déja évidemment positive, indépendamment du terme tout positif $\frac{2a^3m^2c}{3C^3}$; d'où il résulte de même que l'attraction à l'équateur, moins la force centrifuge, sera toujours une quantité positive, puisqu'elle est à l'attraction au pole en raison de 1 à m; donc lorsque la solution sera possible, le problême en aura plusieurs, comme dans le cas où $\frac{1}{C^3} = 0$, c'est-à-dire, où l'attraction est simplement en raison inverse du quarré de la distance.

On pourroit tirer de-là plusieurs conséquences relatives à la Figure de la Terre dans le cas métaphysique dont il s'agit ici; mais nous nous bornons dans ce Mémoire, pour plus de simplicité, au cas donné par la nature, à celui seul de l'attraction en raison inverse du quarré de la distance.

(*e*) *Art.* 16. Il est aisé de voir sans aucun calcul que $\frac{4A^3}{3C^3}$ peut être même $> PM$, (Fig. 6) sans que la courbe cesse d'avoir des tangentes parallèles à l'axe entre R & son extrémité Q infiniment éloignée. En effet, il est

clair, comme on l'a vu p. 107, *art.* 15, qu'elle a de telles tangentes entre les points R' & Q, lorſque $\frac{4A^3}{3C'^3} = PM$. Donc elle aura encore néceſſairement en faiſant $\frac{4A^3}{3C'^3}$ un peu plus grand que PM; ce qui doit au moins durer juſqu'à une certaine limite. Il eſt évident, par exemple, que ſi AP eſt la valeur de m qui répond au *maximum* de PM, & ſi $\frac{4A^3}{3C'^3}$ eſt $< PN = PM + \frac{4A^3}{3C'^3AP^2}$, il y aura un point où la tangente ſera parallèle à l'axe. Cela ſe prouve par un raiſonnement analogue à celui de l'*art.* 15 ci-deſſus, pag. 107.

(*f*) *Art.* 23. Nous avons ſuppoſé deux choſes dans les calculs de cet article 23.

La première, que $\frac{m^2[(k^2+3)ATk - 3k]}{k^3}$ aura un *maximum* toujours poſſible, tant que m ne ſurpaſſera pas 1. C'eſt ce qu'il eſt aiſé de voir, en conſidérant 1°. que quand $m = 1$, ou $k = 0$, $\frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} = (art.\ 5, p.\ 101)\ \frac{4k^2}{3 \cdot 5} = 0$; 2°. que quand $m = 0$, $\frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} = (art.\ 6\ \&\ 8) - 2 \log. \frac{2}{m} + 3$. Or comme $\frac{\log. \frac{2}{m}}{\frac{2}{m}}$ ou $\frac{m}{4} \times 2 \log. \frac{2}{m}$ eſt $= 0$

(*art.* 8), lorſque m eſt infiniment petit ou zéro, donc à plus forte raiſon $m^2 \times -2\log.\frac{2}{m} + 3m^2$ eſt $= 0$, lorſque $m = 0$; donc lorſque $m = 1$, & lorſque $m = 0$, la quantité $\frac{m^2(k^2+3)ATk}{k^3} - \frac{3m^2}{k^2}$ eſt $= 0$; donc il y a néceſſairement entre $m = 1$, & $m = 0$, une valeur de m, qui donne la quantité $\frac{m^2(k^2+3)ATk - 3km^2}{k^3}$ égale à un *maximum*.

Une ſeconde ſuppoſition que nous avons faite, c'eſt que quand $\frac{4A^3}{3C^3}$ eſt $< R$, $\frac{4A^3}{3C^3 mm} + \frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3}$ a toujours un *maximum* poſſible.

Pour le démontrer, ſoit AVS (Fig. 13) la courbe dont les ordonnées ſont $= \frac{m^2[(k^2+3)ATk - 3k]}{k^3}$, m n'étant pas ſuppoſé > 1, & ſoit tracée la courbe NKR parallèle à AVS, enſorte que AN, VK, SR ſoient par-tout égales à $\frac{4A^3}{3C^3}$; il eſt aiſé de voir, en faiſant pour abréger $\frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} = -p$, que les ordonnées de cette courbe NKR, rapportées à l'axe AT, ſeront $\frac{4A^3}{3C^3} - m^2p$, & que par conſéquent ſi VK ou $\frac{4A^3}{3C^3}$ eſt $<$ que la plus grande VB des ordonnées m^2p, la courbe NKQ coupera ſon axe en deux points O, Q. Soient maintenant z les ordon-

nées de cette courbe NKR; il faut donc prouver que $\frac{4A^3}{3C^3m^2} = p$, ou, ce qui est la même chose, $\frac{z}{m^2}$ aura un *maximum*. Or cela est évident; car z ayant des valeurs négatives, & étant $= 0$ aux points O, Q, il est évident que $\frac{z}{m^2}$ sera $= 0$ aux mêmes points O & Q, & que $\frac{z}{m^2}$ aura des valeurs négatives. Donc la courbe qui auroit pour ordonnées les valeurs de $\frac{z}{m^2}$, coupera aussi son axe en O & en Q, & aura des ordonnées négatives; donc $\frac{z}{m^2}$ aura un *maximum* négatif, qui répondra à quelque point placé entre O & Q; c'est ce *maximum* négatif que nous avons appellé $-R'$.

Il est aisé de voir que la courbe AVS tracée (Fig. 13) & dont les ordonnées sont $= \frac{m^2[(k^2+3)ATk - 3k]}{k^3}$ coupe son axe en S sous un angle dont la tangente $= \frac{8}{3\cdot 5}$; car l'ordonnée en S est $= m^2 \times \frac{4k^2}{3\cdot 5} = \frac{1\times 4k^2}{3\cdot 5}$ & l'abscisse est $\sqrt{(1+kk)} = 1 + \frac{kk}{2}$; donc, &c. Voyez ci-dessus la note (c). De plus au point A l'ordonnée sera $= m^2\left[\frac{m^2+2}{m^2-1} \times \frac{1}{2\sqrt{(1-mm)}} \times \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \frac{3}{m^2-1}\right] = m^2 \times \left[-2 \times \frac{1}{2} \times \log.\frac{4}{mm} + 3\right] = m^2\left[-2\log.\frac{2}{m} + 3\right]$ dont la

différence $6\,m\,dm - 4\,m\,dm \log.\frac{2}{m} + 2\,m\,dm$ est $= 0$ lorsque $m = 0$, puisque $m \log.\frac{2}{m} = 0$ (*art.* 8, pag. 102); ainsi la courbe touche son axe en A.

(*g*) *Art.* 37. On peut aisément trouver quelle est la plus grande valeur de $\frac{(k^2+1)\,ATk - k}{k^3}$. Car 1°. la différence de cette quantité est $\frac{dk}{k^2} + \frac{ATk}{k^3} \times dk\,(-k^2 - 3) + \frac{2k\,dk}{k^4} = \frac{dk\,[3k - ATk \times (k^2+3)]}{k^4}$ (à cause de $k\,dk = m\,dm$) $\frac{m\,dm}{k^5} \times [+3k - ATk\,(k^2+3)]$; or ATk (*art.* 9, p. 103) est toujours $> \frac{3k}{kk+3}$. Donc tant que k^2 n'est pas négatif, la différence est négative; donc la quantité dont il s'agit va en diminuant depuis $k = 0$ jusqu'à $k = \infty$. 2°. Maintenant lorsque k est imaginaire, la différence est égale à $\frac{m\,dm}{k^5} \times \left[3 - \frac{(m^2+2)}{2\sqrt{(1-mm)}} \times \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-m^2)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)\right]$, quantité négative (*art.* 10, pag. 103). Donc la valeur de $\frac{(k^2+1)\,ATk - k}{k^3}$ va en diminuant depuis $k^2 = -1$ ou $m = 0$, jusqu'à $k = \infty$ qui donne cette quantité $= 0$. D'où il s'ensuit que la plus grande valeur de $\frac{(k^2+1)\,ATk - k}{k^3}$ est celle qui répond à $k^2 = -1$, c'est-à-dire, à $m = 0$.

De plus, lorſque k^2 eſt négatif, la quantité $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3}$ $-\frac{1}{k^2}$, devient $\frac{m^2}{(m^2-1)\sqrt{(1-m^2)}} \times \frac{1}{2}$ logarith. $\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) + \frac{1}{1-m^2}$; & lorſque m eſt infiniment petit, cette quantité eſt $= -\frac{m^2}{2}$ log. $\frac{4}{mm} + 1 = 1$, le premier terme étant nul (*Note f*). Donc puiſque la valeur de cette quantité eſt $\frac{2}{3}$ lorſque $k = 0$, & $= 1$ lorſque $k^2 = -1$ ou $m = 0$, il s'enſuit que la ſolution ſera illuſoire ſi $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C^3}$ eſt plus grande que l'unité.

(*h*) *Art.* 39. On a vu dans l'*art.* 38, p. 110, que la valeur de ρ ou $(k^2+1)^2\sigma$ eſt d'abord poſitive & finie quand $k = 0$, & qu'elle eſt négative infinie quand $k = \infty$. Donc cette quantité ρ aura une valeur poſitive égale à un *maximum*, ou du moins qui ſera plus grande que toutes les autres valeurs poſitives de ρ.

(*i*) *Art.* 45. Lorſque $m = 1$, la valeur de l'ordonnée a une différence négative ſi $-\frac{2.4A^3}{3C^3} + \frac{8}{3.5}$ eſt négatif; car la différence de l'ordonnée lorſque $m = 1$ ou k infiniment petit, eſt évidemment $-\frac{2.4A^3 m\,dm}{m^4} + d\left(\frac{4k^2}{3.5}\right) = m\,dm \times \left[-\frac{2.4A^3}{3C^3} + \frac{8}{3.5}\right]$. Or

ſi

si dans cette supposition la valeur de $\frac{4A^3}{3C'^3}$ étoit encore telle qu'elle fût plus petite que la plus grande ordonnée PM (Fig. 6) ou la correspondante PN', alors la courbe $R'KN'NQ$ auroit la forme qu'on lui a donnée dans la Fig. 14, s'approchant d'abord de son axe depuis R' jusqu'en quelque point K, puis s'en éloignant jusqu'en N', & s'en rapprochant ensuite jusqu'à ce qu'elle se confonde en Q avec son axe, devenu asymptote.

Si dans cette même hypothèse il étoit possible que $\frac{A^3}{3C'^3}$ fût encore assujetti aux conditions énoncées dans l'*art.* 23, p. 111, la courbe totale auroit à peu près la forme tracée dans la Fig. 14; enfin, si dans cette hypothèse $\frac{2a}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ étoit positif & $< SR'$, le problême auroit cinq solutions, dont la premiere donneroit un équilibre non ferme, la seconde un équilibre ferme, la troisiéme un équilibre non ferme; la quatriéme un équilibre ferme, la cinquiéme un équilibre non ferme.

Mais comme l'assujettissement à ces différentes conditions exige dans $\frac{A^3}{3C'^3}$ des valeurs qui pourroient bien ne pas s'accorder entr'elles, j'abandonne à d'autres Géometres cette discussion, plus laborieuse par les calculs qu'elle peut demander, qu'utile & curieuse en elle-même.

(*k*) *Art.* 47. Il n'est pas difficile de voir que la quan-

tité $\frac{(kk+1)(k-ATk)}{k^3}$ eſt $= 1 - \left[\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right]$; ainſi il n'eſt pas ſurprenant que la différence de la premiere de ces quantités ſoit égale à la différence (priſe négativement) de la quantité $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$, que nous avons conſidérée dans la Note (*g*) ci-deſſus. De plus, cette derniere quantité eſt égale, comme on l'a vu dans la même Note, à 1 lorſque $m = 0$, à $\frac{2}{3}$ lorſque $m = 1$, & à zéro lorſque $m = \infty$, ainſi la quantité $\frac{(kk+1)(k-ATk)}{k^3}$ doit être égale, dans les mêmes circonſtances, à zéro, à $\frac{2}{3}$ & à l'unité. Ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans le préſent article 47, pag. 123, par un calcul direct.

Nous ajouterons à cette Remarque le calcul ſuivant de l'attraction au pole & à l'équateur d'un ſphéroïde elliptique, attraction qui ſera exprimée par le rayon *a* de la ſphere égale au ſphéroïde, & d'où nous tirerons quelques conſéquences qui peuvent être utiles.

L'attraction au pole étant $\frac{2ca(kk+1)}{k^3} \times (k - ATk)$ ſera (en mettant pour *a* ſa valeur $\frac{\alpha}{(kk+1)^{\frac{1}{3}}}$) égale à $\frac{2c\alpha(kk+1)^{\frac{2}{3}}}{k^3} \times (k - ATk)$.

Lorſque *k* eſt infiniment petit, ou $= 0$, cette quan-

tité est $= \frac{2ca}{3}$, comme il est aisé de le voir d'ailleurs, puisque le sphéroïde est alors une sphere dont le rayon $= a$.

Lorsque k est infini, l'attraction au pole devient $\frac{2ca.k^{\frac{1}{3}}+1}{k^3} = \frac{2ca}{k^{\frac{2}{3}}}$, c'est-à-dire, infiniment petite.

De même l'attraction à l'équateur sera $\frac{ca\times(kk+1)^{\frac{1}{3}}}{(kk+1)^{\frac{2}{3}}} \times \left[\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right]$. Cette quantité, lorsque k est infiniment petit ou $= 0$, devient $\frac{2ca}{3}$, attraction de la sphere du rayon a; & lorsque k est infini, elle devient $\frac{ca.k}{k^{\frac{2}{3}}} \times \frac{90^\circ}{k} = \frac{ca.90^\circ}{k^{\frac{2}{3}}}$, c'est-à-dire, infiniment petite.

Supposons présentement k^2 négatif, & nous trouverons l'attraction au pole $= 2ca\,m^{\frac{4}{3}} \times \frac{1}{m^2-1} \times \left[1 - \frac{1}{2\sqrt{(1-mm)}} \log. \left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)\right]$, quantité qui est $= \frac{2ca}{3}$ lorsque $m = 1$; & lorsque $m = 0$, ou infiniment petit, elle est égale à $ca\,m^{\frac{4}{3}} \log. \frac{4}{m^2}$, quantité infiniment petite, puisque $m \log. \frac{4}{m^2}$ est déja infiniment petit (*art.* 8, p. 102), & à plus forte raison le sera encore étant multiplié par $m^{\frac{1}{3}}$.

L'attraction à l'équateur ſera dans la même hypothèſe $\frac{c\,a\,m}{m^{\frac{1}{2}}} \times \left[\frac{m^2}{mm-1} \times \frac{1}{2\sqrt{(1-mm)}} \log. \left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right) - \frac{1}{mm-1}\right]$, laquelle eſt $\frac{2\,c\,a}{3}$ lorſque $m = 1$, & $m^{\frac{1}{2}} \times c\,a \times \left[-\frac{m^2}{2} \log. \frac{4}{mm} + 1\right]$ lorſque m eſt infiniment petit; or $\log. \frac{4}{mm}$ eſt $= 2 \log. \frac{2}{m}$, & nous avons vu ci-deſſus que $\frac{\log. \frac{2}{m}}{\frac{2}{m}}$ ou $\frac{m \log. \frac{2}{m}}{2}$ eſt une quantité infiniment petite; donc $\frac{m^2}{2} \log. \frac{4}{mm}$ ou $\frac{m^2}{2} \times 2 \log. \frac{2}{m}$ ou $2m \times \frac{m}{2} \log. \frac{2}{m}$ eſt à plus forte raiſon une quantité infiniment petite; donc l'attraction à l'équateur, lorſque m eſt infiniment petit, eſt égale à $c\,a\,m^{\frac{1}{2}}$, c'eſt-à-dire, infiniment petite.

Ainſi l'attraction à l'équateur & au pole eſt infiniment petite, ſoit dans un ſphéroïde infiniment applati, ſoit dans un ſphéroïde infiniment allongé.

(*l*) *Art.* 55. Nous ajouterons encore que dans le cas même où 6 eſt ſuppoſé très-grand par rapport à l'axe $2a$, & au rayon de l'équateur $2ma$, la ſolution n'eſt qu'approchée, & non pas abſolument rigoureuſe, parce qu'on a négligé dans le calcul de la force attractive du corps attirant S, les quantités de l'ordre de $\frac{a^2}{6^4}$. Ainſi

le ſphéroïde, qui eſt rigoureuſement elliptique lorſque le corps attirant S eſt nul, c'eſt-à-dire, lorſque $\frac{A^3}{C'^3} = 0$, quelle que ſoit d'ailleurs la quantité ω ou la force centrifuge, ne ſera plus rigoureuſement elliptique; mais, en ſuppoſant toujours C très-grand par rapport à a & ma, le ſphéroïde ſera toujours à très-peu près elliptique, & aura à très-peu près les axes que donnera la ſolution, quand même $\frac{A^3}{C'^3}$ & ω ne ſeroient pas des quantités très-petites, pourvû qu'elles ſoient aſſujetties aux conditions énoncées dans ce Mémoire pour la poſſibilité de la ſolution.

(*m*) *Art.* 63. Lorſque $\omega = 0$ & $\frac{A^3}{C'^3} = 0$, les quantités $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$ & $\frac{2(k-ATk)}{k^3}$ deviennent chacune $= \frac{2}{3}$ quand $m = 1$; ainſi l'interſection des deux courbes, qui ſont pour lors NMQ (Fig. 8) & OPX (Fig. 9) ſe fait alors en un point qui répond à $m = 1$. C'eſt-là, pour ainſi dire, le cas extrême, le premier cas de notre problême, comme celui de $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ poſitif & plus grand que l'unité, ou celui de $\frac{2A^3}{3C'^3} > 1$ en ſont les autres cas extrêmes, qui donnent une ſolution illuſoire, ainſi que $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3C'^3}$ plus grand que la valeur de $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} -$

$\frac{1}{k^3}$ qui répond à $m = AV$ (Fig. 10). Ayant ainſi conſidéré & fixé ces cas extrêmes, & celui de $\omega = 0$ & $\frac{A^3}{C^3} = \alpha$, qui donne $m = 1$, on ſuppoſera que les quantités $-\frac{2\omega}{3} + \frac{2A^3}{3C^3}$ d'une part, & $-\frac{4A^3}{3C^3 mm}$ de l'autre, croiſſent inſenſiblement, la premiere étant ſuppoſée ſucceſſivement négative & poſitive, & on aura toutes les ſolutions poſſibles dans les différens cas. C'eſt un détail que j'abandonne à d'autres Géometres, ayant ſuffiſamment développé les principes qui peuvent les guider dans cette recherche.

Au lieu de prendre pour les ordonnées des deux courbes $\frac{2(k - ATk)}{k^3} - \frac{4A^3}{3C^3 mm}$ & $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^3} + \frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2\omega}{3}$, on pourroit prendre (*art.* 19, p. 109) $\frac{2(kk+1)(k-ATk)}{k^3} - \frac{4A^3}{3C^3}$, & $[k^2+1] \times \left[\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2} + \frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2\omega}{3}\right]$. La quantité $\frac{2(kk+1)(k-ATk)}{k^3}$ ſera $= 0$ lorſque $m = 0$; $= \frac{2}{3}$ lorſque $m = 1$, & $= 2$ lorſque $m = \infty$, & de plus ſa différence ſera toujours poſitive (*art.* 47), enſorte que cette quantité ira toujours en augmentant depuis $m = 0$ juſqu'à $m = \infty$. Ainſi la courbe AOM (Fig. 15) qui auroit pour ordonnée $\frac{2(kk+1)(k-ATk)}{k^3}$

auroit à peu près la forme qu'on lui a donnée dans cette Figure, touchant ſon axe AT en A, où $m = 0$, & où l'ordonnée $= \frac{2mm}{3}$, & ayant pour aſymptote la ligne LM parallèle à AT, & diſtante de AT de la quantité 2 ou $2a$. Faiſant enſuite $Aa = \frac{4A^3}{3C^3}$, & décrivant la courbe aom parallèle à AOM, elle aura pour ordonnée $\frac{2(kk+1)}{k^3} \times (k - ATk) - \frac{4A^3}{3C^3}$. Maintenant ſi on imagine la courbe FLR (Fig. 8) dont les ordonnées rapportées à l'axe AT ſont $\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2} + \frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2\omega}{3}$, & qu'on multiplie ces ordonnées par $k^2 + 1$ ou m^2, on formera une nouvelle courbe $AKFV$ (Fig. 16) qui aura pour ordonnée $[k^2+1] \times \left[\frac{(k^2+1)ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2} + \frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2\omega}{3}\right]$; cette courbe touchera d'abord ſon axe en A, enſuite elle le coupera au même point F où l'ordonnée de la courbe LFR (Fig. 8) eſt $= 0$; enfin elle s'en éloignera à l'infini vers V. L'interſection des deux courbes aom (Fig. 15) & $AKFV$ (Fig. 16) donnera la ſolution du problême, & fournira des remarques analogues à celles des articles précédens. Ces deux courbes aom, AFV, ſeront telles 1°. que la courbe aom aura néceſſairement des ordonnées négatives d'abord, & poſitives enſuite, coupant ſon axe en quelque point i, & ayant

pour aſymptote parallèle à AT ou LM une ligne diſtante de AT, de la quantité $2 - \frac{4A^3}{3C^3}$. 2°. A l'égard de la courbe $AKFV$, elle aura toutes ſes ordonnées négatives ſi $1 + \frac{2A^3}{3C^3} - \frac{2u}{3}$ eſt $= 0$ ou négatif. 3°. Pour que la ſolution ne ſoit pas illuſoire, il eſt néceſſaire que l'interſection des deux courbes ſe faſſe du côté des ordonnées poſitives (*art.* 58, p. 128).

XLVII.

XLVII. MÉMOIRE.

Suite des Recherches ſur la Figure de la Terre.

CE Mémoire étant une ſuite du précédent, que j'ai ſimplement ſéparé en deux, pour ne pas le rendre trop long, je conſerverai l'ordre des Numeros des Articles, & celui des Remarques.

65. J'ai ſuppoſé juſqu'ici que le ſolide elliptique qui repréſente la Terre, étoit un ſolide de révolution; & c'eſt pour cette raiſon que le corps attirant à été placé dans l'axe de rotation. Si ce corps étoit placé par-tout ailleurs, alors la Terre ne pourroit plus être un ſolide de révolution; mais il faut examiner ſi elle ne pourroit pas être un ſolide elliptique, c'eſt-à-dire, un ſolide dont toutes les coupes fuſſent des ellipſes. Pour procéder avec ordre dans cette recherche, je commencerai par les conſidérations ſuivantes. Je ſuppoſerai un ſphéroïde tel que toutes les coupes par l'axe AC (Fig. 17) ſoient des ellipſes qui ayent cette même ligne AC pour axe, & tel encore que la coupe par un plan KCR perpendiculaire à AC, ſoit auſſi une

ellipſe dont les axes ſoient CK, CR; & je chercherai ſi un tel ſolide ſuppoſé fluide, peut être en équilibre en vertu de ſa rotation autour du centre C & d'un axe quelconque, & de l'attraction d'un corps éloigné placé où l'on voudra.

66. Soit A (Fig. 18) un point de la ſurface d'un ſphéroïde, ou en général d'un ſolide quelconque, & imaginons par le point A, les lignes AB, AC, AD qui faſſent entr'elles des angles droits, & qui ſoient telles que les plans BAD, BAC, DAC, ſoient perpendiculaires l'un à l'autre; ſoit AH le petit côté de la coupe curviligne formée dans la ſurface du ſphéroïde par le plan ABC. Je dis que ſi on ſuppoſe une ligne perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde, & que par cette ligne & par la ligne AD perpendiculaire (*hyp.*) au plan BAC, on faſſe paſſer un plan, ce plan formera, par ſa ſection avec le plan ABC, une ligne AG perpendiculaire au petit côté AH. Car la ligne qu'on a imaginée perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde, eſt évidemment perpendiculaire à la ligne AH, puiſque cette ligne AH (*hyp.*) eſt ſur la ſurface du ſphéroïde; donc AH eſt auſſi perpendiculaire à cette ligne. De plus, AH ſe trouvant dans le plan ABC auquel (*hyp.*) AD eſt perpendiculaire, il eſt clair que AH ſera perpendiculaire à AD; donc AH ſera perpendiculaire au plan mené par AD & par la perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde; donc elle ſera perpendiculaire à AG qui ſe trouve (*hyp.*) dans ce plan.

67. Si on ſuppoſe deux forces qui agiſſent ſuivant AB & AC, & dont la réſultante AG ſoit perpendiculaire à AH, je dis que la force réſultante de AG & d'une troiſiéme force ſuivant AD ſera perpendiculaire à AH. En effet le petit côté AH étant perpendiculaire à AG & à AD, ſera perpendiculaire au plan GAD, & par conſéquent à toutes les lignes tirées dans ce plan, parmi leſquelles ſe trouve néceſſairement la réſultante des forces ſuivant AG & AD.

68. Donc la force réſultante des trois forces ſuivant AB, AC, AD ſera perpendiculaire au côté AH, ſi la force réſultante des forces ſuivant AB & AC eſt perpendiculaire à AH.

69. Par la même raiſon ſi AL eſt le petit côté de la coupe formée dans la ſurface du ſolide par le plan BAD, & que la réſultante des forces ſuivant AB & AD ſoit perpendiculaire à AL, la réſultante des trois forces ſuivant AB, AD, AC ſera perpendiculaire à AL.

70. Donc puiſque cette force réſultante eſt déja perpendiculaire à AH, elle le ſera au plan paſſant par AH & par AL, c'eſt-à-dire, à la ſurface du ſphéroïde.

71. De plus, ſi AZ eſt le petit côté de la coupe formée dans le ſphéroïde par le plan DAC, & que par la direction de cette force perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde, & par la ligne AB perpendiculaire au plan DAC, on faſſe paſſer un plan, la ſection AO de ce plan avec le plan DAC ſera perpendiculaire à AZ; comme on a vu ci-deſſus, que AG étoit per-

pendiculaire à AH. En effet, AZ eſt perpendiculaire à AB, puiſqu'elle ſe trouve (*hyp.*) dans le plan DAC auquel AB eſt perpendiculaire. De plus, cette ligne AZ ſe trouvant encore (*hyp.*) ſur la ſurface du ſphéroïde, ſera perpendiculaire à la ligne qu'on ſuppoſe perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde en A. Donc AZ ſera perpendiculaire au plan mené par AB, & par cette perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde; donc elle ſera perpendiculaire à AO qui ſe trouve dans ce dernier plan (*hyp.*), puiſqu'elle eſt la commune ſection de ce plan & du plan DAC.

72. De toutes ces propoſitions il s'enſuit, que pour que la force réſultante des trois forces ſuivant AB, AC, AD ſoit perpendiculaire à la ſurface du ſphéroïde, il faut que la force réſultante de deux forces quelconques ſuivant AB, AC, ſoit perpendiculaire en A à la coupe ou courbe formée ſur la ſurface du ſphéroïde par le plan ABC; & que ſi cette condition a lieu pour deux quelconques des trois plans, elle aura lieu pour le troiſiéme; & qu'ainſi il ſuffit qu'elle ait lieu dans deux de ces plans.

73. Soit maintenant (Fig. 17) un ſolide renfermé par des ellipſes AOK, ALR, $KK'R$, dont les axes AC, CK, CR, ſoient perpendiculaires entr'eux; ſoit imaginée une ellipſe $AO'K'$ dont les axes ſoient AC & CK', & ſoit menée par un point O' de l'ellipſe quelconque $AO'K'$ une ligne $O'P$ parallèle au plan CKR, laquelle rencontre en P le plan de l'ellipſe $ALRC$,

& par ce point P, dans le plan $ALRC$, une ligne PQ perpendiculaire à AC, & par conſéquent parallèle à CR; il eſt clair que le plan $O'PQ$ ſera parallèle au plan KCR, enſorte que la perpendiculaire $O'N$ à ce plan KCR, ſera égale à CQ.

74. De plus, il eſt très-aiſé de prouver par la méthode de M. Maclaurin (*Traité du Flux & Reflux*, ſect. 3, lem. 4), 1°. que l'attraction exercée en O' ſuivant $O'N$ par le ſphéroïde entier, ſera égale à l'attraction qu'exerceroit ſur le point P, parallèlement à $O'N$ ou AC, un ſphéroïde paſſant par P, ſemblable au grand ſphéroïde, & ayant le même centre C & ſes trois axes dans la même direction que les axes AC, CK, CR. 2°. Que l'attraction exercée en P par ce dernier ſphéroïde parallèlement à AC, ſera égale à l'attraction qu'exerceroit ſur le point Q ſuivant QC un ſphéroïde paſſant par Q, ſemblable au grand ſphéroïde, & ayant le même centre & les axes dirigés de la même maniere.

75. Donc l'attraction en O' exercée par le ſphéroïde entier ſuivant $O'N$ parallèlement à l'axe AC, ſera égale à l'attraction exercée ſur le point Q ſuivant QC par un ſphéroïde ſemblable au grand, & paſſant par Q.

76. Donc en général l'attraction exercée en un point quelconque de la ſurface du ſphéroïde, parallèlement à l'un des axes quelconques, ſera égale à l'attraction qu'exerceroit un ſphéroïde ſemblable ſur un point placé dans l'axe en queſtion, à la même hauteur que le point ſuppoſé de la ſurface.

77. De plus, l'attraction en Q ſuivant QC étant à l'attraction en A ſuivant AC, comme QC eſt à AC, il s'enſuit que l'attraction d'un point quelconque O' ſuivant $O'N$ parallèle à un des axes quelconque AC ſera à l'attraction du point A ſuivant AC, comme $O'N$ eſt à AC; & qu'il en ſera de même des autres axes; c'eſt-à-dire, que l'attraction de O' parallèlement à KC ſera à celle de K ſuivant KC, comme la diſtance $O'P$ du point O' au plan ALR eſt à KC; & que l'attraction de O' ſuivant une ligne parallèle à CR ſera à celle de R ſuivant RC, comme la diſtance du point O' au plan ACK eſt à CR.

78. Soient AC, KC, RC (Fig. 19) les trois axes du ſphéroïde perpendiculaires l'un à l'autre, & ſoit M la projection d'un point quelconque de la ſurface du ſphéroïde, ſur le plan KCR, enſorte qu'ayant mené MP perpendiculaire à CK, on ait $CP = x$, $PM = y$; ſoit auſſi z la diſtance du point ſuppoſé de la ſurface au point M ou au plan KCR. Imaginons préſentement un corps attirant S ou $\frac{2cA^3}{3}$ placé à la diſtance δ du centre C, diſtance dont la projection ſur le plan KCR ſoit CS', enſorte que la ligne δ faſſe avec CS un angle $= \alpha$, & la ligne CS' un angle $= \zeta$ avec CK prolongée vers G; il eſt aiſé de voir que CS' ſera $= \delta$ cof. α; que la diſtance du corps attirant au plan KCR ſera $= \delta$ ſin. α, & qu'en menant $S'G$ perpendiculaire à CK prolongée, on aura $S'G = \delta$ cof. α ſin. ζ; & $CG =$

δ cos. α cos. ζ. Donc la distance absolue du corps attirant au point de la surface dont M est la projection, distance que j'appelle δ', sera $= \sqrt{[(\delta \sin. \alpha - z)^2 + (\delta \cos. \alpha \cos. \zeta - x)^2 + (\delta \cos. \alpha \sin. \zeta - y)^2]} = \sqrt{(\delta^2 - 2\delta x \cos. \alpha \cos. \zeta - 2\delta z \sin. \alpha - 2\delta y \times \cos. \alpha \sin. \zeta)}$; donc $\frac{1}{\delta'^3} =$ à très-peu près $\frac{1}{\delta^3} + \frac{3x \cos. \alpha \cos. \zeta}{\delta^4} + \frac{3y \cos. \alpha \sin. \zeta}{\delta^4} + \frac{3z \sin. \alpha}{\delta^4}$.

79. De-là il est aisé de voir que de l'attraction du corps S sur le point dont M est la projection, il résultera

1°. Une force parallèle à MQ ou PC, & $= \frac{Sx}{\delta^3} = \frac{2cA^3x}{3\delta^3}$; une force parallèle à MP ou QC, & égale à $\frac{Sy}{\delta^3} = \frac{2cA^3y}{3\delta^3}$; enfin, une force perpendiculaire au plan KCR, ou parallèle à AC, & $= \frac{Sz}{\delta^3} = \frac{2cA^3z}{3\delta^3}$.

2°. Une force parallèle à PG & $= \frac{2cA^3}{3} \times \left(\frac{CG}{\delta'^3} - \frac{CG}{\delta^3}\right) =$ (à cause de $CG = \delta \cos. \alpha \cos. \zeta$) $\left(+ \frac{3x \cos. \zeta^2 \cos. \alpha^2}{\delta^3} + \frac{3y \cos. \alpha^2 \sin. \zeta \cos. \zeta}{\delta^3} + \frac{3z \sin. \alpha}{\delta^3} \times \cos. \alpha \cos. \zeta\right) \times \frac{2cA^3}{3}$.

3°. Une force parallèle à SG, & égale à $\frac{2cA^3}{3} \times \left(\frac{SG}{\delta^3} - \frac{SG}{\delta^3}\right) =$ (à cauſe de $SG = \delta$ cof. α ſin. ζ) $\frac{2cA^3}{3} \times \left(\frac{3x \text{ cof. } \alpha^2 \text{ cof. } \zeta \text{ ſin. } \zeta}{\delta^3} + \frac{3y \text{ cof. } \alpha^2 \text{ ſin. } \zeta^2}{\delta^3} + \frac{3z \text{ ſin. } \alpha \text{ cof. } \alpha \text{ ſin. } \zeta}{\delta^3}\right)$.

4°. Enfin, une force parallèle à AC, & égale à $\frac{2cA^3}{3} \times \left(\frac{\delta \text{ ſin. } \alpha}{\delta^3} - \frac{\delta \text{ ſin. } \alpha}{\delta^3}\right) = \frac{2cA^3}{3\delta^3} \times (3x \text{ cof. } \alpha \text{ cof. } \zeta \text{ ſin. } \alpha + 3y \text{ cof. } \alpha \text{ ſin. } \zeta \text{ ſin. } \alpha + 3z \text{ ſin. } \alpha^2)$.

80. Il eſt de plus aiſé de voir que quelle que ſoit l'expreſſion de l'attraction en A, K, R, elle ne pourra être qu'une fonction des axes AC, CK, CR.

81. Soient donc $AC = r$, $CK = r'$, $CR = r''$; & ſuppoſons que l'attraction en A exercée par la maſſe du ſphéroïde ſoit $\frac{2crA'}{3}$ ou $\frac{2cr'A'm}{3}$, en ſuppoſant $\frac{r}{r'} = m$; l'attraction en K, $\frac{2cr'A''}{3}$; l'attraction en R, $\frac{2cr'A''}{3}$ ou $\frac{2cr'A''m'}{3}$, en ſuppoſant $\frac{r''}{r'} = m'$; A', A', A'' étant des fonctions de dimenſion nulle de r, r', r''. Il eſt aiſé de voir par les propoſitions précédentes, que l'attraction ſur le point donné de la ſurface, parallèlement à MQ, ſera $\frac{2cA''x}{3}$; parallèlement à MP, $\frac{2cA''y}{3}$, & parallèlement à AC, $\frac{2cA'z}{3}$.

82.

82. Donc la force parallèle à MQ ou KC, & réſultante de l'attraction du ſphéroïde & de celle du corps S, ſera

$$\frac{2cA''x}{3} + \frac{2cA^3x}{3\delta^3} - \frac{2cA^3}{3\delta^3}\,(3x\ \text{cof.}\ \mathfrak{C}^2\ \text{cof.}\ \alpha^2 + 3y\ \text{cof.}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\ \mathfrak{C}\ \text{cof.}\ \mathfrak{C} + 3z\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \mathfrak{C}).$$

La force parallèle à MP ou RC, ſera

$$\frac{2cA'''y}{3} + \frac{2cA^3y}{3\delta^3} - \frac{2cA^3}{3\delta^3}\,(3x\ \text{cof.}\ \alpha^2\ \text{cof.}\ \mathfrak{C} \times \text{ſin.}\ \mathfrak{C} + 3y\ \text{cof.}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\ \mathfrak{C}^2 + 3z\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \mathfrak{C}).$$

Enfin, la force parallèle à AC ſera

$$\frac{2cAz}{3} + \frac{2cA^3z}{3\delta^3} - \frac{2cA^3}{3\delta^3} \times (3x\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \mathfrak{C} \times \text{ſin.}\ \alpha + 3y\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \mathfrak{C}\ \text{ſin.}\ \alpha + 3z\ \text{ſin.}\ \alpha^2).$$

83. Imaginons préſentement (Fig. 20) que le ſphéroïde tourne autour d'un axe quelconque, dont la projection ſur le plan KCR ſoit CZ, & qui faſſe avec CZ un angle $= \alpha'$; & nommons $\mathfrak{C}'$ l'angle ZCK; en menant par le point M (projection du point pris ſur la ſurface du ſphéroïde) la ligne MX perpendiculaire à CZ; il eſt aiſé de voir que $CX = x\ \text{cof.}\ \mathfrak{C}' + y \times \text{ſin.}\ \mathfrak{C}'$.

84. Soit maintenant CV (Fig. 21) l'axe de rotation, dont la projection, par l'hypothèſe, eſt CXZ; & ſoit dans le plan CVZ, X' le point dont la projection eſt X, & qui eſt lui-même la projection du point donné de la ſurface du ſphéroïde ſur le plan CVZ; ſoit enfin $X'Y$ perpendiculaire à CV; il eſt clair que ce

point Y ſera le centre de rotation du point de la ſurface du ſphéroïde, dont M eſt la projection ; de plus, $CY = CX$ cof. $\alpha' + XX'$ ſin. $\alpha' = CX$ cof. $\alpha' + z$ ſin. α' ; $CO = CY$ cof. $\alpha' = CX$ cof. $\alpha'^2 + z$ ſin α' cof. α' ; $YO = CY$ ſin. $\alpha' = CX$ cof. α' ſin. $\alpha' + z$ ſin. α'^2 ; enfin $XX' - YO$, diſtance du point ſuppoſé de la ſurface au plan paſſant par Y & parallèle au plan KCR de la Fig. 20, ſera $z - CX$ cof. α' ſin. $\alpha' - z$ ſin. $\alpha'^2 = z$ cof. $\alpha'^2 - CX$ cof. α' ſin. α'. On aura encore OB (même Fig. 20) $= CO$ ſin. $\mathfrak{C}'$, & $CB = CO$ cof. $\mathfrak{C}'$.

85. Donc achevant le calcul, on a (Fig. 21) $CY = x$ cof. $\mathfrak{C}'$ cof. $\alpha' + y$ ſin. $\mathfrak{C}'$ cof. $\alpha' + z$ ſin. α' ; $YO = x$ cof. $\mathfrak{C}'$ cof. α' ſin. $\alpha' + y$ ſin. $\mathfrak{C}'$ cof. α' ſin. $\alpha' + z$ ſin. α'^2 ; $XX' - YO = z$ cof. $\alpha'^2 - x$ cof. $\mathfrak{C}'$ cof. α' ſin. $\alpha' - y$ ſin. $\mathfrak{C}'$ cof. α' ſin. α' ; $CO = x$ cof. $\mathfrak{C}'$ cof. $\alpha'^2 + y$ ſin. $\mathfrak{C}'$ cof. $\alpha'^2 + z$ ſin. α' cof. α' ; CB ou CO cof. $\mathfrak{C}' = x$ cof. $\mathfrak{C}'^2$ cof. $\alpha'^2 + y$ ſin. $\mathfrak{C}'$ cof. $\mathfrak{C}'$ cof. $\alpha'^2 + z$ ſin. α' cof. α' cof. $\mathfrak{C}'$; & enfin OB ou CO ſin. $\mathfrak{C}' = x$ cof. $\mathfrak{C}'$ ſin. $\mathfrak{C}'$ cof. $\alpha'^2 + y$ ſin. $\mathfrak{C}'^2$ cof. $\alpha'^2 + z$ ſin. α' cof. α' ſin. $\mathfrak{C}'$.

86. Soit maintenant $\frac{2 c \varrho \omega}{3}$ la force centrifuge à la diſtance quelconque donnée ρ ; le point O (Fig. 20) étant (*hyp.*) la projection du centre de rotation du point de la ſurface dont M eſt la projection, il eſt facile de prouver qu'en vertu de la rotation, ce point de la ſurface ſera tiré parallèlement à MQ par une force $= \frac{2 c \omega}{3}$

$\times (CB - CP) = \frac{2c\omega}{3}[x(-1 + \text{cof. } \mathfrak{C}'^2 \text{ cof. } \alpha'^2) + y \text{ fin. } \mathfrak{C}' \text{ cof. } \mathfrak{C}' \text{ cof. } \alpha'^2 + z \text{ fin. } \alpha' \text{ cof. } \alpha' \text{ cof. } \mathfrak{C}']$; parallèlement à MP par une force $= \frac{2c\omega}{3}(BO - PM)$ $= \frac{2c\omega}{3}[y(-1 + \text{fin. } \mathfrak{C}'^2 \text{ cof. } \alpha'^2) + x \text{ cof. } \mathfrak{C}' \text{ fin. } \mathfrak{C}' \text{ cof. } \alpha'^2 + z \text{ fin. } \alpha' \text{ cof. } \alpha' \text{ fin. } \mathfrak{C}']$; & enfin parallèlement à CA, c'eſt-à-dire, dans un ſens contraire à AC, par une force $= \frac{2c\omega}{3} \times (XX' - YO) = \frac{2c\omega}{3} \times [z \text{ cof. } \alpha'^2 - x \text{ cof. } \mathfrak{C}' \text{ cof. } \alpha' \text{ fin. } \alpha' - y \text{ fin. } \mathfrak{C}' \text{ cof. } \alpha' \text{ fin. } \alpha']$.

87. D'où il s'enſuit qu'il faudra ajouter ces trois forces aux forces trouvées ci-deſſus (*art.* 82), & réſultantes de l'attraction du ſphéroïde & du corps S; de maniere que les deux premieres de ces trois forces ajoutées, le ſoient avec leur ſigne, & la troiſiéme avec un ſigne contraire; parce que cette troiſiéme force agit dans un ſens parallèle à CA, c'eſt-à-dire, contraire à celui de la troiſiéme force de l'*art.* 82 qui agit dans un ſens parallèle à AC.

88. Pour ſimplifier les calculs, ſuppoſons fin. $\mathfrak{C} = 0$, fin. $\mathfrak{C}' = 0$, & par conſéquent cof. $\mathfrak{C} = 1$, cof. $\mathfrak{C}' = 1$. Cette ſuppoſition eſt permiſe; car il n'eſt pas difficile de voir que les axes AC, KC doivent être dans le plan qui paſſe par la ligne δ qui joint les deux Planetes, & par l'axe de rotation CV (Fig. 21) (*n*). Par-là nous

(*n*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

ſimplifierons nos formules. Nous aurons de plus, la force parallèle à CK (Fig. 17), à la force parallèle à CR, comme $m'm'x$ eſt à y; par la raiſon 1°. que la force réſultante de ces deux forces doit être (*art.* 72) perpendiculaire à l'ellipſe menée par le point donné de la ſurface parallèlement au plan KCR, & ſemblable à l'ellipſe qui paſſe par ce dernier plan; 2°. que CK eſt à CR (*art.* 81) comme 1 eſt à m'. Par la même raiſon la force parallèle à AC doit être à la force parallèle à $CR :: \frac{z}{mm} : y$, AC étant à CR comme m eſt à 1 (*art.* 81).

89. On aura donc $\frac{2cA''x}{3} + \frac{2cA^3x}{3\delta^3} - \frac{2cA^3}{3\delta^3} \times (3x \text{ cof. } \alpha^2 + 3z \text{ ſin. } \alpha \text{ cof. } \alpha) + \frac{2c\omega}{3}(x \text{ cof. } \alpha'^2 - x + z \text{ ſin. } \alpha' \text{ cof. } \alpha') : \frac{2cA''y}{3} + \frac{2cA^3y}{3\delta^3} - \frac{2c\omega}{3} \times y :: m'm'x : y$. D'où l'on tire les deux équations ſuivantes, 1°. $-\frac{2cA^3}{3\delta^3} \times 3z$ ſin. α cof. $\alpha + \frac{2c\omega}{3} \times z$ ſin. α' cof. $\alpha' = 0$; & par conſéquent $\frac{\text{ſin. } 2\alpha'}{\text{ſin. } 2\alpha} = \frac{3A^3}{\omega\delta^3}$.

2° $A'' + \frac{A^3}{\delta^3} - \frac{3A^3}{\delta^3}$ cof. $\alpha^2 + \omega$ (cof. $\alpha'^2 - 1$) $= A''' m'm' + \frac{A^3 m'm'}{\delta^3} - \omega m'm'$.

90. On aura de même $\frac{2cA'z}{3} + \frac{2cA^3z}{3\delta^3} -$

$\frac{2cA^3}{3\delta^3} \times (3\zeta \text{ sin. } \alpha^2 + 3x \text{ cos. } \alpha \text{ sin. } \alpha) - \frac{2c\omega}{3} \times \zeta \text{ cos. } \alpha'^2 + \frac{2c\omega}{3} x \text{ cos. } \alpha' \text{ sin } \alpha' : \frac{2cA''y}{3} + \frac{2cA^3y}{3\delta^3} - \frac{2c\omega y}{3} :: \frac{\zeta}{mm} : y$; d'où l'on tire

1°. $-\frac{2cA^3}{3\delta^3} \times 3x \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha + \frac{2c\omega}{3} x \text{ cos. } \alpha' \text{ sin. } \alpha' = 0$, & par conséquent $\frac{\text{sin. } 2\alpha'}{\text{sin. } 2\alpha} = \frac{3A^3}{\omega\delta^3}$, comme dans l'article précédent.

2°. $A' + \frac{A^3}{3\delta^3} - \frac{3A^3}{\delta^3} \text{ sin. } \alpha^2 - \omega \text{ cos. } \alpha'^2 = \frac{A''}{mm} + \frac{A^3}{\delta^3 mm} - \frac{\omega}{mm}$.

91. Soit ε l'angle que la distance δ des deux Planetes fait avec l'axe de rotation; on aura ou l'on pourra supposer $\alpha' = \alpha + \varepsilon$ (ε étant positif ou négatif); & par conséquent on aura $\frac{\text{sin. } (2\alpha + 2\varepsilon)}{\text{sin. } 2\alpha} = \frac{3A^3}{\omega\delta^3}$; d'où l'on tirera aisément α; car on aura cos. $2\varepsilon + \frac{\text{sin. } 2\varepsilon \text{ cos. } 2\alpha}{\text{sin. } 2\alpha} = \frac{3A^3}{\omega\delta^3}$; d'où $\frac{3A^3}{\omega\delta^3 \text{ sin. } 2\varepsilon} - \text{cot. } 2\varepsilon = \text{cot. } 2\alpha$. On connoîtra donc α, & par conséquent $\alpha' = \alpha + \varepsilon$, & on substituera les valeurs de sin. α, cos. α, sin α', cos. α' dans les deux dernieres équations des deux articles précédens, lesquelles renferment A', A'', A''' & m, m'.

92. Donc puisque A', A'', A''' sont des fonctions

connues de m & de m', il eſt clair qu'il ne reſtera plus que deux équations qui ſerviront à déterminer m & m'. Il s'agit maintenant de déterminer ces quantités A', A'', A''', ou d'une maniere générale, ou du moins dans certains cas particuliers, ſi la ſolution générale ſe refuſe à l'analyſe.

93. Soit $AC = r$, $CK = r(1+\alpha)$, $CR = r(1+\epsilon)$; ſi le ſphéroïde étoit une ſphere, l'attraction en A ſeroit $= \frac{2cr}{3}$, c étant le rapport de la circonférence au rayon; & ſi le ſphéroïde eſt infiniment peu différent d'une ſphere, l'attraction ſera évidemment & à très-peu près $= \frac{2cr}{3} \times (1 + A\alpha + B\epsilon)$, en négligeant les puiſſances de α & de ϵ; A & B étant des quantités conſtantes.

94. Or il eſt évident 1°. que dans cette formule ſi on met α à la place de ϵ, & ϵ à la place de α, elle doit demeurer la même, puiſqu'il n'y a point de raiſon pour que l'axe CK entre dans la formule d'une autre maniere que l'axe CR; d'où il s'enſuit que $B = A$, 2°. Que ſi CK (Fig. 17) $= CA$, c'eſt-à-dire, ſi $\alpha = 0$, on aura l'attraction du ſphéroïde à l'équateur ſuppoſé circulaire. 3°. Que ſi $CK = CR$, c'eſt-à-dire, ſi $\alpha = \epsilon$, on aura l'attraction qu'un ſphéroïde de révolution exerce ſur le pole A.

95. Donc ſi l'attraction d'un ſphéroïde de révolution au pole eſt $= \frac{2cr}{3}(1 + M\alpha')$, $r(1+\alpha')$ étant le

rayon de l'équateur, l'attraction du ſphéroïde de l'*art.* 93 ſera $= \frac{2cr}{3}\left(1 + \frac{M\alpha}{2} + \frac{M\epsilon}{2}\right)$; & l'attraction d'un ſphéroïde à l'équateur, ſera $\frac{2cr}{3}\left(1 + \frac{M\alpha}{2}\right)$, r étant le rayon de l'équateur, & $r(1+\alpha)$ le demi-axe.

96. Par les mêmes raiſons, ſi on ſuppoſe que l'attraction du ſphéroïde ſoit en général $\frac{2cr}{3}(1 + A\alpha + B\epsilon + C\alpha\alpha + D\epsilon\alpha + F\epsilon\epsilon + G\alpha^3 + H\alpha^2\epsilon + L\alpha\epsilon^2 + M\epsilon^3$, &c.) On aura $B = A$, $F = C$, $M = G$, $H = L$; enſorte que l'attraction en A ſera $\frac{2cr}{3}(1 + A\alpha + A\epsilon + C\alpha\alpha + D\epsilon\alpha + C\epsilon^2 + G\alpha^3 + H\alpha^2\epsilon + H\alpha\epsilon^2 + G\epsilon^3$, &c.); l'attraction d'un ſphéroïde à l'équateur, le rayon de l'équateur étant r, & le demi-axe $r(1+\alpha)$, ſera (à cauſe de $\epsilon = 0$) $\frac{2cr}{3}(1 + A\alpha + C\alpha^2 + G\alpha^3)$; & l'attraction au pole, le demi-axe étant r, & le rayon de l'équateur $r(1+\alpha) = r(1+\epsilon)$ ſera $\frac{2cr}{3}(1 + 2A)\alpha + (2C + D)\alpha^2 + (2G + 2H)\alpha^3$. De maniere que connoiſſant l'attraction au pole & l'attraction à l'équateur dans un ſphéroïde de révolution, on connoîtra facilement les trois premiers termes de l'attraction dans un ſphéroïde quelconque, puiſque l'attraction connue du ſphéroïde de révolution à l'équateur & au pole, donnera les valeurs de A, de C,

de G, de $2C + D$, de $2G + 2H$, d'où l'on tire celles de D & de H; & ces formules de l'attraction d'un ſphéroïde quelconque ſeront ſuffiſamment convergentes, ſi α & ϵ ne ſont pas fort grands.

97. Si on nomme CK, r', CR, r'', enſorte que $r = r' + \alpha' r'$, $r'' = r' + \epsilon' r'$, l'attraction en K ſera $\frac{2cr'}{3}(1 + A\alpha' + A\epsilon')$ en ſuppoſant le ſphéroïde peu différent d'une ſphere, c'eſt-à-dire, α' & ϵ' fort petits; & l'attraction en R ſera de même $\frac{2cr''}{3}(1 + A\alpha'' + A\epsilon'')$, en ſuppoſant $r = r'' + \epsilon'' r''$, & $r' = r'' + \alpha'' r''$. Or (*art.* 93) $r' = r + \alpha r = r - \alpha' r'$; donc (à cauſe que r & r' ſont preſque égaux) on aura $\alpha' = -\alpha$; de même $r'' = r + \epsilon r = r' + \alpha' r' + \epsilon r = r' - \alpha r' + \epsilon r = r' + \epsilon' r'$; donc $\epsilon' = \epsilon - \alpha$. Donc ſi on veut exprimer l'attraction $\frac{2cr'}{3}(1 + A\alpha' + A\epsilon')$ au point K, en r, α, ϵ, on mettra pour r', $r + \alpha r$, $-\alpha$ pour α', & $\epsilon - \alpha$ pour ϵ', ce qui donnera $\frac{2c}{3}(r + \alpha r) \times 1 - A\alpha + A\epsilon - A\alpha = \frac{2cr}{3}(1 + \alpha - 2A\alpha + A\epsilon)$.

98. De même on aura $r'' = r + \epsilon r$; & par conſéquent à cauſe de $r = r'' + \epsilon'' r''$, on aura $\epsilon'' = -\epsilon$, & à cauſe de $r' = r'' + \alpha'' r'' = r + \alpha r = r'' - \epsilon r'' + \alpha r''$, on aura $\alpha'' = \alpha - \epsilon$. Donc l'attraction en R ou $\frac{2cr''}{3}(1 + A\alpha'' + A\epsilon'')$ ſera $= \frac{2cr}{3}(1 + \epsilon - A\epsilon +$

$A\epsilon + A\alpha - A\epsilon) = \frac{2cr}{3}(1 + \epsilon + A\alpha - 2A\epsilon)$ (o).

99. Il faut maintenant déterminer, s'il eſt poſſible, les quantités A, A' & A'' des *art.* 89 & 90, pour arriver à une ſolution complette; car dans les deux articles précédens nous nous ſommes contentés de ſuppoſer α & ϵ fort petits. Pour tenter cette ſolution générale, nous avons beſoin des propoſitions ſuivantes.

100. Soit une ellipſe $ALOK$ (Fig. 22) dans laquelle le demi-axe $AC = c$, le demi-axe CK conjugué à celui-là $= b$, une corde quelconque AL tirée du point $A = x$, l'angle $LAM = z$, on aura LM^2 ou xx ſin. $z^2 : AM \times MO$ ou $(x \text{ cof. } z)(2c - x \text{ cof. } z) :: CK^2 (bb) : CA^2 (cc)$; d'où l'on tire $x = \frac{2bb \text{ cof. } z}{c(\text{ſin. } z^2 + \frac{bb}{cc} \text{ cof. } z^2)} = \frac{2bb \text{ cof. } z}{c[1 + (\frac{bb}{cc} - 1) \text{ cof. } z^2]}$.

101. Si on tire CV parallèle à AL, & qu'on nomme CV, r, on aura de même rr ſin. $z^2 = \frac{bb}{cc} \times (cc - rr \text{ cof. } z^2)$; d'où $rr = \frac{bb}{\text{ſin. } z^2 + \frac{b^2}{c^2} \text{ cof. } z^2} = \frac{bb}{1 + (\frac{bb}{cc} - 1) \text{ cof. } z^2}$.

102. Si on éleve perpendiculairement à l'ellipſe $ALOK$ (Fig. 23) une autre ellipſe ARO qui ait le même axe $AO = 2c$, & le demi-axe conjugué $CR = a$,

(o) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

& qu'on imagine un ſolide elliptique $ARQKVA$, renfermé par les ellipſes AKO, ARO, KR; on ſait qu'en coupant ce ſolide par un plan perpendiculaire au plan $AVKO$, & qui paſſe par CV, on y formera une ellipſe VR, dont les demi-axes ſeront CV, CR; & il eſt clair (*article précédent*) qu'on aura $\frac{CV^2}{CR^2} = \frac{bb}{aa\left[1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{cof. }z^2\right]}$.

103. Or on ſait encore que ſi on coupoit le même ſolide par un plan parallèle au plan CVR, & paſſant par AL, on y formeroit une ellipſe ſemblable à l'ellipſe CVR; donc ſi on nomme r le rapport de l'axe AL à ſon conjugué dans cette ellipſe, on aura $r^2 = \frac{bb}{aa\left[1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{cof. }z^2\right]}$.

104. Imaginons maintenant que l'ellipſe dont l'un des axes eſt AL (Fig. 24) & l'autre $GR = \frac{AG}{r}$, tourne autour de ſa tangente ZAP, en décrivant un petit angle dz, l'attraction qu'exercera ſur le point A ſuivant AL le ſolide infiniment petit formé par cette révolution, ſera $4GR\left[\frac{r^3}{(r^2-1)^3}AT.\sqrt{(r^2-1)} - \frac{r}{r^2-1}\right]\times dz$; $AT.\sqrt{(rr-1)}$ déſignant l'angle dont la tangente eſt $\sqrt{(rr-1)}$. C'eſt ce qui réſulte de la Théorie donnée par M. Maclaurin, & après lui

par M. Clairaut ſur la *Figure de la Terre*. Voyez l'Ouvrage de ce dernier, pag. 185.

105. On peut mettre dans l'expreſſion précédente, au lieu de GR ſa valeur $\frac{AG}{r} =$ (*article* 100) $\frac{bb \text{ cof. } z}{rc\left[1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{cof. } z^2\right]}$; ce qui la changera en celle-ci $\frac{4bbdz \text{ cof. } z}{c\left[1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{cof. } z^2\right]} \times \left[\frac{r^2 AT.\sqrt{(r^2-1)}}{(r^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2-1}\right]$.

106. Or l'attraction ſuivant AL (Fig. 22) en produira une ſuivant AO, qui ſera égale à la précédente multipliée par cof. z; & cette attraction étant intégrée, & doublée (à cauſe de l'autre moitié du ſolide elliptique qui eſt de l'autre côté de AO) on aura l'attraction totale du ſolide elliptique & complet, tel qu'on l'a ſuppoſé formé dans l'*art.* 102 ci-deſſus.

107. Il faudra de plus que cette intégrale ſoit = 0 quand cof. $z = 1$, & complette quand cof. $z = 0$.

108. Il faudra donc intégrer d'après ces conditions la quantité $\frac{8bbdz \text{ cof. } z^2}{c\left[1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{cof. } z^2\right]} \times \left[\frac{r^2 AT.\sqrt{(r^2-1)}}{(r^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2-1}\right]$, quantité dans laquelle on a la valeur de r en cof. z, & celle de cof. z en r; en effet, $r^2 = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{cof. } z^2}$ (*art.* 103); d'où, en fai-

ſant $r^2 = \frac{1}{r'^2}$, $\frac{1}{C^2} = \frac{b^2}{a^2}$, $\frac{bb}{cc} - 1 = a^2$, on aura $r'^2 = C^2 (1 + a^2 \text{ cof. } z^2)$; & la quantité à intégrer deviendra (en mettant à part le coefficient conſtant $\frac{8bb}{c}$) égale à $dz \text{ cof. } z^2 \times r^2 C^2 \times \left[\frac{r^2 AT. \sqrt{(r^2-1)}}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r^2-1}\right]$ ou (en mettant pour r ſa valeur $\frac{1}{r'}$) $dz \text{ cof. } z^2 \times \frac{C^2}{r'} \times \left[\frac{1}{(1-r'^2)^{\frac{1}{2}}} \times AT. \frac{\sqrt{(1-r'^2)}}{r'}\right] - dz \text{ cof. } z^2 . C^2 \times \frac{1}{1-r'^2}$.

109. Donc puiſque $\text{cof. } z^2 = \frac{r'^2 - C^2}{C^2 a^2}$, on aura $\text{cof. } z = \frac{\sqrt{(r'^2 - C^2)}}{Ca}$; $\text{ſin. } z = \frac{\sqrt{(C^2 a^2 - r'^2 + C^2)}}{Ca}$; & $dz \text{ cof. } z^2 = \text{cof. } z \times d \text{ ſin. } z = \frac{\sqrt{(r'^2 - C^2)}}{Ca} \times \frac{r' dr'}{Ca\sqrt{(C^2 a^2 + C^2 - r'^2)}}$. De-là il eſt aiſé de voir, en faiſant $r'r' = u$, que la ſeconde partie $- dz \text{ cof. } z^2 \times \frac{C^2}{1-r'^2}$ de la différentielle précédente s'intégrera par des arcs de cercle ou des logarithmes; à l'égard de la premiere, elle ſe réduira à l'intégration de la différentielle $\frac{dr'}{a(1-r'^2)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\sqrt{(r'^2 - C^2)}}{\sqrt{(C^2 a^2 + C^2 - r'^2)}} \times AT. \frac{\sqrt{(1-r'^2)}}{r'}$.

110. Cette différentielle peut ſe ſimplifier, ſi $a^2 + 1 = 1$, c'eſt-à-dire, $a = 0$, ou ſi $C^2 + x^2 C^2 = 1$; car dans le premier cas, la difficulté ſe réduit à intégrer

$\frac{dv'}{(1-v'^2)^{\frac{1}{2}}} \times AT.\frac{\sqrt{(1-v'^2)}}{v'}$; & dans le ſecond à intégrer $\frac{dv'.\sqrt{(v'^2-c^2)}}{(1-v'^2)^2} \times AT.\frac{\sqrt{(1-v'^2)}}{v'}$. Mais il eſt aiſé de voir (*art.* 108) que la premiere de ces conditions donne $b = c$, & la ſeconde $c = a$; ainſi le ſolide elliptique ſuppoſé auroit alors un cercle pour une de ſes coupes ACK ou ACR (Fig. 23) par l'axe AO, enſorte que AKO ou ARO ſeroit un cercle. C'eſt le cas que MM. Maclaurin & Clairaut ont traité, & ſur lequel nous ne reviendrons pas (*p*).

111. Dans les autres cas l'intégration de la différentielle dépendra en partie de la rectification des ſections coniques. Pour le voir aiſément, on fera $\frac{v'}{\sqrt{(1-v'^2)}} = \mu$, & on aura $v' = \frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$; & la différentielle dont il s'agit ſe réduira à $\frac{d\mu\sqrt{[\mu^2(1-c^2)-c^2]}}{\sqrt{[(c^2a^2+c^2-1)\mu^2+c^2a^2+c^2]}} \times AT.\frac{1}{\mu}$; or il eſt aiſé de voir que l'intégration du premier facteur dépend de la rectification des ſections coniques. Voyez Mem. de Berlin 1746. Mais de plus, comme ce facteur différentiel multiplie l'angle dont la tangente eſt $\frac{1}{\mu}$, on voit que la différentielle totale eſt d'un tel degré de complication, que l'intégration paroît échapper à toutes les méthodes connues (*q*).

(*p*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.
(*q*) Voyez *ibid.*

112. On peut employer d'autres méthodes pour trouver l'attraction du ſphéroïde dont il s'agit. Pour y parvenir, ſoit CKR (Fig. 25) l'ellipſe dont les demi-axes ſont $CK = b$, & $CR = a$; ſoit $CS = \rho$ un demi-diametre quelconque de cette ellipſe, & l'angle $SCR = u$, on aura $\rho\rho$ ſin. $u^2 = (aa - \rho\rho$ cof. $u^2) \times \frac{bb}{aa}$, d'où $\rho\rho = \frac{bb}{1 + \left(\frac{bb}{aa} - 1\right) \text{cof. } u^2}$. Donc ſi on fait paſſer par AO & CS une ellipſe dans le ſolide elliptique ſuppoſé, on aura $\frac{CS^2}{AC^2} = \frac{bb}{cc} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{bb}{aa} - 1\right) \text{cof. } u^2}$.

Maintenant ſi on tire dans l'ellipſe ASO une corde AZ (Fig. 26), on aura, en nommant l'angle ZAO, y, $AZ = (art.\ 100) \frac{2\varrho\varrho \text{ cof. } y}{c\left[1 + \left(\frac{tt}{cc} - 1\right) \text{cof. } y^2\right]}$, & YZ ou AZ ſin. $y = \frac{2\varrho\varrho \text{ ſin. } y \text{ cof. } y}{c\left[1 + \left(\frac{tt}{cc} - 1\right) \text{cof. } y^2\right]}$; imaginons préſentement que le plan de l'ellipſe ASO décrive autour de AO un petit angle du, on trouvera facilement que l'élément du ſolide infiniment petit ainſi formé, exercera ſuivant AO une attraction égale à $AZ\,dy \times YZ\,du \times \frac{1}{AZ} \times$ cof. $y = du \times dy \times YZ$ cof. y; cette quantité étant doublée & intégrée, en faiſant du conſtant & y variable, donnera l'attraction totale du petit ſolide dont il s'agit; cette différentielle

intégrée ſera donc $2du \times \int \frac{2\varrho\varrho dy \text{ ſin. } y \text{ cof. } y}{c\left[1+\left(\frac{ff}{cc}-1\right)\text{cof. } y^2\right]}$, laquelle doit être $=0$ quand cof. $y=1$, & complette quand cof. $y=0$.

113. Soit $-\frac{\varrho\varrho}{cc}+1=\sigma^2$, & cof. $y=x$, il faudra d'abord intégrer $-\frac{dx.x^2}{1-\sigma^2x^2}$, dont l'intégrale eſt $\int\frac{dx}{\sigma^2(1-\sigma^2x^2)}-\int\frac{dx}{\sigma\sigma}=-\frac{x}{\sigma\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dx}{2(1+\sigma x)}$ $+\frac{1}{\sigma^2}\int\frac{dx}{2(1-\sigma x)}=-\frac{x}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^3}\log.(1+\sigma x)$ $-\frac{1}{2\sigma^3}\log.(1-\sigma x)$; laquelle étant complettée, après avoir mis cof. y à la place de x, ſera $+\frac{1}{\sigma\sigma}-\frac{1}{2\sigma^3}\log.\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)$; quantité qui ſe changera aiſément (*art.* 3 & 4, pag. 100) en des arcs de cercle, ſi σ eſt imaginaire.

114. Maintenant, on mettra dans cette quantité à la place de σ ſa valeur en u réſultante de l'équation $\sigma\sigma=1-\frac{\varrho^2}{c^2}=1-\frac{bb}{cc\left[1+\left(\frac{bb}{aa}-1\right)\text{cof. } u^2\right]}$; ou ſi l'on veut on mettra au lieu de u ſa valeur en σ dans la différentielle $\frac{4\varrho\varrho du}{c}\times\left[+\frac{1}{\sigma\sigma}-\frac{1}{2\sigma^3}\log.\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)\right]$ $=4cdu\times(1-\sigma\sigma)\times\left[+\frac{1}{\sigma\sigma}-\frac{1}{2\sigma^3}\log.\right.$

$\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)\Big]$; or puiſque $\frac{bb}{cc\left[1+\left(\frac{bb}{aa}-1\right)\text{cof. }u^2\right]} = 1-\sigma\sigma$, ſoit $\frac{bb}{cc} = \varepsilon^2$, & $\frac{bb}{aa}-1 = \delta^2$, on aura $\frac{\varepsilon^2}{1+\delta^2\text{ cof. }u^2} = 1-\sigma^2$, & δ^2 cof. $u^2 = \frac{\varepsilon^2}{1-\sigma\sigma} - 1 = \frac{\varepsilon^2-1+\sigma^2}{1-\sigma\sigma}$; d'où cof. $u = \frac{\sqrt{(\varepsilon^2-1+\sigma^2)}}{\delta\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}$; & ſin. $u = \frac{\sqrt{(\delta^2-\delta^2\sigma^2-\varepsilon^2+1-\sigma^2)}}{\delta\sqrt{(1-\sigma\sigma)}}$; ou en faiſant $\frac{1}{1-\sigma\sigma} = \pi^2$, cof. $u = \frac{\sqrt{(\varepsilon^2\pi^2-1)}}{\delta}$, & ſin. u $\frac{\sqrt{(\delta^2-\varepsilon^2\pi^2+1)}}{\delta}$; donc $du = \frac{-\varepsilon^2\pi\,d\pi}{\sqrt{(\delta^2-\varepsilon^2\pi^2+1)}.\sqrt{(\varepsilon^2\pi^2-1)}}$; de plus $\sigma = \frac{\sqrt{(\pi^2-1)}}{\pi}$; donc ſubſtituant ces valeurs dans la différentielle, il en réſultera un terme de cette forme $\frac{A\pi^2\,d\pi}{(\pi^2-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{[(\delta^2-\varepsilon^2\pi^2+1)(\varepsilon^2\pi^2-1)]}} \times \log.\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)$, dont l'intégration ne dépend pas ſimplement des logarithmes & des arcs de cercle, & même eſt plus compliquée que celle de l'*art.* 111, qu'il faut par conſéquent préférer à celle-ci (*r*).

115. On peut employer une troiſiéme méthode pour déterminer l'attraction du ſolide propoſé. Elle conſiſte à couper ce ſolide par des tranches elliptiques *PCR* (Fig. 27) perpendiculaires à l'axe *AC*, à chercher l'at-

(*r*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

traction

traction de chacune de ces tranches ſur le point A, & enſuite à ſommer ces attractions. Mais comme cette méthode ne donne pas un réſultat plus ſimple que la précédente, je la renverrai aux Notes (*ſ*); & je me contenterai de dire ici 1°. que l'attraction du point A eſt en général $\frac{4\pi c}{3} \times \varphi$, 2π étant le rapport de la circonférence au rayon, c le demi-axe AC, & φ une quantité ou fonction dépendante des rapports $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, que j'appelle m & n. 2°. Que cette fonction doit être telle que m & n y entrent de la même maniere (*art.* 94). 3°. Qu'elle devienne $= 1$ lorſque m & n ſont $= 1$. 4°. Qu'en faiſant $m = n$, la quantité $\frac{4\pi c}{3} \times \varphi$ devienne l'attraction au pole d'un ſolide elliptique de révolution dont l'axe $= 2c$, c'eſt-à-dire, $4\pi c \left(\frac{m^2}{m^2 - 1} - \frac{m^2}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}} \times AT \sqrt{(m^2 - 1)} \right)$. 5°. Qu'en faiſant $m = 1$ ou $n = 1$, la quantité $\frac{4\pi c}{3} \times \varphi$ devienne égale à l'attraction à l'équateur d'un ſolide elliptique de révolution, c'eſt-à-dire, à $2\pi nc \left(\frac{n^2}{(n^2-1)^{\frac{1}{2}}} AT \sqrt{(nn - 1)} - \frac{1}{n^2 - 1} \right)$ ou $2\pi mc \left(\frac{m^2}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}} AT \sqrt{(m^2 - 1)} - \frac{1}{m^2 - 1} \right)$; d'où il s'enſuit que lorſque $m = n$, la

(*ſ*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

quantité φ devient $= \frac{3m^2}{m^2-1} - \frac{3m^2}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}} \times AT\sqrt{(m^2-1)}$; que quand $m = 1$, elle devient $\frac{3n^3}{2(n^2-1)^{\frac{1}{2}}} AT\sqrt{(nn-1)} - \frac{3n}{2(n^2-1)}$; & que quand $n = 1$, elle devient une quantité pareille en mettant m pour n.

116. Mais comme ces conditions ne suffisent pas pour déterminer par une formule générale l'attraction du solide proposé, nous allons la chercher dans quelques cas particuliers, en supposant qu'à la vérité les trois axes soient inégaux, mais que l'un des axes b ou a differe très-peu de l'axe $AC = c$. Voici de quelle maniere nous procéderons dans cette recherche.

117. On sait qu'un sphéroïde elliptique de révolution, dont l'axe $= 2r$, & le diametre de l'équateur $2rm$, a pour attraction au pole $4\pi r\left(\frac{m^2}{m^2-1} - \frac{m^2 AT\sqrt{(m^2-1)}}{(m^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right)$, ou $4\pi r\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2 ATk}{k^3}\right)$, en supposant $k^2 = mm - 1$, & prenant toujours 2π pour le rapport de la circonférence au rayon. Donc si on imagine un solide infiniment petit renfermé entre deux demi-ellipses infiniment proches, qui aient l'axe commun $2r$, qui fassent entr'elles l'angle du, & dont le rayon de l'équateur soit $r(m+\alpha)$, α étant supposé très-petit, on aura pour l'attraction que ce solide exerce à l'extrémité de son axe, $2r\,du \times$

$\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3} ATk\right) + 2rdu.\alpha \times \frac{d\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3} ATk\right)}{dm}$; quantité dont il faudra doubler l'intégrale pour avoir l'attraction totale. Or $d\left(\frac{m^2}{k^2}\right) = \frac{2mdm}{k^2} - \frac{2kdk.m^2}{k^4} =$ (à cauſe de $kdk = mdm$) $2mdm \times \left(\frac{1}{k^2} - \frac{m^2}{k^4}\right)$; & la différence de $\frac{m^2}{k^3} ATk$ eſt $\left(\frac{2mdm}{k^3} - \frac{3kdk.m^2}{k^5}\right) \times ATk + \frac{m^2 dk}{k^3.(k^2+1)} =$ (à cauſe de $kdk = mdm$ & $kk + 1 = mm$) $mdm \times ATk\left(\frac{2}{k^3} - \frac{3m^2}{k^5}\right) + \frac{mdm}{k^4}$. Donc on aura $\frac{\alpha d\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3} ATk\right)}{dm}$, ou $\frac{m\alpha d\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3} ATk\right)}{mdm} =$ $m\alpha \times \left[\frac{2}{k^2} - \frac{2m^2}{k^4} - ATk\left(\frac{2}{k^5} - \frac{3m^2}{k^5}\right) - \frac{1}{k^4}\right] = m\alpha\left[\frac{2k^2 - 2m^2 - 1}{k^4} - \frac{ATk}{k^5}(2k^2 - 3m^2)\right]$ = (à cauſe de $m^2 = k^2 + 1$) $\frac{m\alpha \times -3}{k^4} + m\alpha \times \frac{ATk}{k^5} \times (3 + k^2)$, qu'on peut transformer encore en $m\alpha \times -\frac{3}{k^4} + \frac{ATk}{k^5}(2 + m^2) \times m\alpha$.

118. Maintenant puiſque CR^2 ou ρ^2 (*art.* 112) $= \frac{bb}{1 + \left(\frac{bb}{aa} - 1\right) \text{cof. } u^2}$, ſoit $\frac{b}{a} = 1 + \epsilon$; ϵ étant une quantité très-petite, & on aura $\rho^2 = bb(1 - 2\epsilon \text{ cof. } u^2)$.

Donc ſi on ſuppoſe $bb = mmrr$, & qu'on faſſe $\frac{e^{\alpha}}{rr} = (m+\alpha)^2 = m^2 + 2m\alpha$, on aura $m\alpha = -\zeta m^2 \times$ cof. u^2. Or $2du$ cof. $u^2 = du + du$ cof. $2u$, dont l'intégrale lorſque $u = 90°$ eſt $\frac{2\pi}{4}$; & le double de cette intégrale eſt π.

119. Il réſulte de tous ces calculs que l'attraction au pole dans un ſphéroïde elliptique dont l'axe $= 2r$, & les rayons de l'équateur $b = mr$, & $a = \frac{mr}{1+\zeta}$, ou $mr(1-\zeta)$, ζ étant fort petit, ſera égale à la quantité ſuivante $4\pi r\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3} ATk\right) - \pi\zeta m^2 r \times \left[\frac{-3}{k^4} + \frac{ATk}{k^5}(2+m^2)\right]$ (t).

120. Suppoſons maintenant dans l'*art.* 100, que b & c different peu l'un de l'autre, enſorte que $\frac{b}{c} = 1+\zeta'$, on aura (*art.* 103) $rr = \frac{b^2}{a^2}(1 - 2\zeta'$ cof. $z^2)$. Suppoſons enſuite $\frac{c}{a} = m$, on aura $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2(1+2\zeta')}{a^2} = m^2(1+2\zeta')$; & $r^2 = \frac{c^2}{a^2}(1+2\zeta' - 2\zeta'$ cof. $z^2) = m^2(1+2\zeta'$ ſin. $z^2)$. On aura de même $\frac{bb}{c} = c(1+2\zeta')$; & $\frac{bb \text{ cof. } z^2}{c} \times \frac{1}{1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{cof. } z^2} =$

(t) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

c cof. $z^2 (1 + 2c' - 2c' \text{ cof. } z^2) = c \text{ cof. } z^2 (1 + 2c' \text{ fin. } z^2)$. Enfin, ſi au lieu de r, on met $r + \alpha'$ (α étant une quantité très-petite), ce qui donne au lieu de r^2, $r^2 + 2r\alpha'$, on aura évidemment $r\alpha' = m^2 c' \text{ fin. } z^2$.

121. Maintenant il n'eſt pas difficile de voir (en ſuppoſant $r^2 - 1 = k^2$) que la différence de $\frac{r^2 ATk}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{r^2-1}$ eſt la même, avec des ſignes contraires, que celle de $\frac{r^2}{r^2-1} - \frac{r^2 ATk}{(r^2-1)^{\frac{1}{2}}}$, à cauſe de $\frac{r^2}{r^2-1} = 1 + \frac{1}{r^2-1}$. D'où il s'enſuit (*art.* 117) que la différence de $\frac{r^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}$ eſt $= r\,dr \times \left[\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5} \times (2 + r^2)\right]$, ce qu'on peut d'ailleurs trouver directement par une méthode analogue à celle de cet *art.* 117.

122. Donc au lieu de $\frac{r^2 AT\sqrt{(r^2-1)}}{(r^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2-1}$, on aura la quantité ſuivante $\frac{r^2 AT\sqrt{(r^2-1)}}{(r^2-1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{r^2-1} + m^2 c' \text{ fin. } z^2 \times \left[\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5}(2 + r^2)\right]$, ou (en mettant m pour r) $\frac{m^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2} + m^2 c' \text{ fin. } z^2 \times \left[\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5}(2 + m^2)\right]$.

123. Donc enfin, au lieu de la quantité $\frac{8bbdz \text{ cof. } z^2}{c\left[1 + \left(\frac{bb}{cc} - 1\right) \text{cof. } z\right]} \times \left(\frac{r^2 AT\sqrt{(rr-1)}}{(rr-1)^{\frac{3}{2}}} -\right.$

$\frac{1}{\nu^2 - 1}$) de l'*art.* 108, qui eſt la différentielle de l'attraction d'un ſphéroïde à coupes elliptiques en tout ſens, on aura $8\,c\,dz$ cof. z^2 $(1 + 2\,\epsilon'$ ſin. $z^2) \times \left(\frac{m^2\,ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2} + m^2\,\epsilon'$ ſin. $z^2 \times \left[\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5} \times (2 + m^2)\right]\right) = 8\,c\,dz$ cof. $z^2 \times \left[\frac{m^2\,ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right] + 8\,c\,\epsilon'\,dz$ ſin. z^2 cof. $z^2 \times \left[\frac{2\,m^2\,ATk}{k^3} - \frac{2}{k^2} + \frac{3\,m^2}{k^4} - \frac{2\,m^2\,ATk}{k^5} - \frac{m^4\,ATk}{k^5}\right]$.

124. L'intégrale de la première partie, (c'eſt-à-dire, de celle qui ne contient point ϵ') eſt évidemment l'attraction à l'équateur dans un ſphéroïde où ϵ' ſeroit $= 0$, c'eſt-à-dire, dans un ſphéroïde dont le demi-axe ſeroit $= a$, & le rayon de l'équateur c ou ma. Donc puiſque cette intégrale eſt comme l'on ſait $2\,\pi\,a\left(\frac{m^3}{k^3} \times ATk - \frac{m}{k^2}\right)$ elle ſera (à cauſe de $c = ma$) $2\,\pi\,c \times \left(\frac{m^2\,ATk}{k^3} - \frac{(1+\nu\nu)}{k^2}\right)$.

125. Enfin comme ſin. z^2 cof. $z^2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$ cof. $4z$, & par conſéquent dz ſin. z^2 cof. $z^2 = dz\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right.$ cof. $\left.4z\right)$; il eſt clair que ſi on prend 8 fois l'intégrale de cette quantité, en ſuppoſant cette intégrale $= 0$ quand $z = 0$, & complette quand $z = 90°$ ou $\frac{2\pi}{4}$, on aura pour l'intégrale de la ſeconde partie $\frac{\pi\,c\,\epsilon'}{2}\left[\frac{2\,m^2\,ATk}{k^3}\right.$

$$- \frac{2}{k^2} + \frac{3m^2}{k^4} - \frac{2m^2 ATk}{k^5} - \frac{m^4 ATk}{k^5} \Big].$$

126. Il réſulte de la formule précédente, qu'un ellipſoïde dont les demi-axes ſont, r ou a, ou $\frac{c}{m}$, c, & b ou $c(1+\epsilon')$, exerce à l'extrémité du demi-axe $2c$ une attraction $= 2\pi\epsilon\left(\frac{m^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{\pi c \epsilon'}{2} \times \left[\frac{2m^2 ATk}{k^3} - \frac{2}{k^2} + \frac{3m^2}{k^4} - \frac{2m^2 ATk}{k^5} - \frac{m^4 ATk}{k^5}\right]$.

127. Donc ſi on ſuppoſe un autre ellipſoïde, dont les demi-axes ſoient, r ou $\frac{c'}{m'}$, c', & $c'(1+\epsilon'')$, on aura l'attraction à l'extrémité de l'axe $2c'$, en mettant dans la formule précédente c' & m' pour c & pour m, & ϵ'' pour ϵ'. Or ſi on ſuppoſe $c' = c(1+\epsilon')$, & $c'(1+\epsilon'') = c$, on aura le même ellipſoïde que celui de l'*art.* 120, avec cette différence que la formule donnera ici l'attraction, non à l'extrémité de l'axe $2c$, mais à l'extrémité de l'axe $2c' = 2c(1+\epsilon') = 2b$ (*art.* 120), c'eſt-à-dire, à l'extrémité de $2b$. Maintenant les équations $\frac{c'}{c} = 1+\epsilon' = \frac{1}{1+\epsilon''}$ donnent $\epsilon'' = -\epsilon'$; & puiſque r ou $\frac{c}{m}$ eſt la même choſe que $\frac{c'}{m'} = \frac{c(1+\epsilon')}{m'}$; donc $m' = m(1+\epsilon')$.

128. Il faudra donc, pour avoir l'attraction à l'extré-

mité de l'axe $2b$, mettre dans la formule précédente $c(1+\epsilon') = c'$ au lieu de c, $m(1+\epsilon') = m'$ au lieu de m, & ϵ'' ou $-\epsilon'$ à la place de ϵ'.

129. Donc l'attraction à l'extrémité de l'axe $2b$ ſera $2\pi c\left(\frac{m^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) + 2\pi c\epsilon'\left(\frac{m^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) + 2\pi c m^2 \epsilon'\left[\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5}(2+m^2)\right] - \frac{\pi c \epsilon'}{2} \times \left[\frac{2m^2 ATk}{k^3} - \frac{2}{k^2} + \frac{3m^2}{k^4} - \frac{2m^2 ATk}{k^5} - \frac{m^4 ATk}{k^5}\right] = 2\pi c\left(\frac{m^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{\pi c \epsilon'}{2} \times \left(\frac{m^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{3\pi c m^2 \epsilon'}{2}\left[\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5} \times (2+m^2)\right]$. Et comme on a fait voir (*Note* (*t*) ſur l'*art.* 119) que $\epsilon' = -\epsilon$, on mettra encore $-\epsilon$ pour ϵ' dans cette formule.

130. Donc les trois axes de l'ellipſoïde étant ſuppoſés $2r$, $2rm$ & $2rm(1-\epsilon)$, les attractions aux extrémités de ces trois axes ſeront (*art.* 119) 1°. à l'extrémité de l'axe $2r$ ou $2CA$, $4\pi r\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3} ATk\right) - \pi\epsilon m^2 r\left[-\frac{3}{k^4} + ATk(2+m^2)\right]$. 2°. A l'extrémite de l'axe $2rm$ (*art.* 126) ou $2CR$, $2\pi mr \times \left(\frac{m^2 ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{\pi mr\epsilon}{2}\left(\frac{2m^2 ATk}{k^3} - \frac{2}{k^2} + \frac{3m^2}{k^4} - \frac{2m^2 ATk}{k^5} - \frac{m^4 ATk}{k^5}\right)$. 3°. Enfin à l'extrémité du troiſiéme axe $2rm(1-\epsilon)$ (*art.* 129) ou

ou $2CK, 2\pi mr\left(\frac{m^2ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) - \pi Cmr \times \left(\frac{m^2ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{3\pi Cm^3r}{2}\left[\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5} \times (2+m^2)\right]$, ou, en supposant $2b = 2mr(1-C)$, $2\pi b\left[\frac{m^2ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right] + \pi Cb\left(\frac{m^2ATk}{k^3} - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{3\pi Cbm^2}{2}\left(\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5}[2+m^2]\right)$.

131. Puisque l'attraction au pole dans un sphéroïde de révolution est $4\pi r\left(\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3}ATk\right) = 4\pi r \times \left(1 + \frac{1}{k^2} - \frac{m^2}{k^3}ATk\right)$, & que l'attraction à l'équateur est $2\pi mr\left(\frac{m^2}{k^3}ATk - \frac{1}{k^2}\right)$; il s'ensuit que si on suppose $\frac{m^2}{k^3}ATk - \frac{1}{k^2} = N$, l'attraction à l'équateur, en supposant le rayon de ce cercle $= r'$, sera $= 2\pi r'N$, & l'attraction au pole $4\pi r(1-N)$. Il est de plus évident que ces deux quantités seront positives, c'est-à-dire, que N sera positif & < 1. D'où l'on voit en passant que si m est > 1, il s'ensuit que $m^2ATk - k$ sera positif & $< k^3$; & si m est < 1, il s'ensuit que $\frac{1}{1-mm} - \frac{m^2}{2.(1-mm)^{\frac{1}{2}}} \times \log.\left(\frac{1+\sqrt{(1-mm)}}{1-\sqrt{(1-mm)}}\right)$ sera positif & < 1.

122. Supposant donc maintenant $\frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5}$

$(2+m^2)=M$, & $c=2\pi$, on aura (*art.* 81 & 130)

$$A'=3(1-N)+\frac{3cm^2}{4}\times M.$$

$$A''=\tfrac{3}{2}N-\frac{3c}{8}(2N+Mm^2).$$

$$A'''=\tfrac{3}{2}N+\frac{3cN}{4}-\frac{9m^2Mc}{8}.$$

133. Enfin, puiſque (*art.* 81) $\frac{CR}{CK}=\frac{r''}{r'}=m'$; & qu'ici on a ſuppoſé $\frac{CR}{CK}=$ (*art.* 130) $\frac{mr}{mr(1-c)}=1+c$, on aura $m'=1+c$ dans cet *art.* 81.

134. Subſtituant donc les valeurs de A', A'', A''', dans les équations trouvées *art.* 89 & 90, on aura

1°. $-\frac{3c}{8}(2N+Mm^2)+\frac{A^3}{\delta^3}-\frac{3A^3\cos.\alpha^2}{\delta^3}-\omega\sin.\alpha'^2=3cN+\frac{3cN}{4}-\frac{9m^2Mc}{8}+\frac{A^3}{\delta^3}-\omega+\frac{2A^3c}{\delta^3}-2\omega c$; ou, en réduiſant & tranſpoſant,

$\frac{3A^3}{\delta^3}\cos.\alpha^2-\omega\cos.\alpha'^2+\frac{9Nc}{2}+\frac{2A^3c}{\delta^3}-2\omega c-\frac{3Mm^2c}{4}=0.$

2°. Dans l'équation de l'*art.* 90, on mettra mm pour $\frac{1}{mm}$, en faiſant attention que les quantités que nous avons nommées dans l'*art.* 81, r, r'', r', c'eſt-à-dire, AC, CR, CK, ſont ici (*art.* 130) r, mr, & $mr\times(1-c)$, de ſorte qu'au lieu de l'équation $\frac{r}{r''}=m$,

de l'*art.* 81, on aura ici $\frac{r}{mr} = \frac{1}{m}$, & par conſéquent $\frac{1}{m}$ au lieu de m dans l'équation de l'*art.* 90. On aura donc $\frac{3(1-N)}{m^2} + \frac{A^3}{S^3 m^2} - \frac{3A^3 \text{ ſin. } \alpha^2}{S^3 m^2} - \frac{\omega \text{ cof. } \alpha'^2}{m^4} + \frac{3CM}{4} = \frac{3N}{2} + \frac{3CN}{4} - \frac{9Mm^2C}{8} + \frac{A^3}{S^3} - \omega$.

135. En faiſant $C = 0$, $\alpha' = 90°$ & $\alpha = 90°$, la premiere de ces formules s'évanouit, & la ſeconde devient la formule de l'*art.* 2 du Mém. XLVI, laquelle repréſente le cas où en effet α & $\alpha' = 90°$; c'eſt-à-dire, où le corps attirant S eſt dans l'axe même de révolution AC ou r (*u*).

136. En faiſant évanouir C, on aura l'équation, ou plutôt les deux équations qui donneront la valeur de m & celle de C. Pour faire ce calcul plus facilement & plus ſimplement, on conſidérera que C étant très-petit (*hyp.*), les termes $+\frac{2A^3C}{S^3} - 2\omega C$ dans la premiere équation (*art.* 134) ſont nuls devant les termes $\frac{3A^3 \text{ cof. } \alpha^2}{S^3} - \omega \text{ cof. } \alpha'^2$, ce qui donne $\frac{3A^3 \text{ cof. } \alpha^2}{S^3} - \omega \text{ cof. } \alpha'^2 + \frac{9NC}{2} - \frac{3Mm^2C}{4} = 0$, & par conſéquent $C = \left(\omega \text{ cof. } \alpha'^2 - \frac{3A^3 \text{ cof. } \alpha^2}{S^3}\right) : \left(\frac{9N}{2} - \frac{3Mm^2}{4}\right)$.

(*u*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

137. Maintenant on aura par la seconde équation (*art* 134), en mettant au lieu de $1 - N$ sa valeur $\frac{m^2}{k^2} - \frac{m^2}{k^3} ATk$ (*art.* 131), l'équation $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3\delta^3} = \frac{2\omega \cos.\alpha'^2}{3m^2} + \frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} - \frac{2A^3}{3m^2\delta^3} \times (1 - 3\sin.\alpha^2) + \frac{\mathcal{C}N}{2} - \frac{3Mm^2\mathcal{C}}{4} - \frac{\mathcal{C}M}{2}$; équation dans laquelle on substituera au lieu des trois derniers termes du second membre qui contiennent $\mathcal{C}$, la quantité $\frac{\left(\frac{N}{2} - \frac{3Mm^2}{4} - \frac{M}{2}\right)\left(\omega \cos.\alpha'^2 - \frac{3A^3 \cos.\alpha^2}{\delta^3}\right)}{\frac{9N}{2} - \frac{3Mm^2}{4}}$.

138. Si l'on suppose m fort peu différent de l'unité, ensorte que k^2 soit fort petit, on aura 1°. $N =$ à peu près $\frac{2}{3}$, (l'attraction à l'équateur dans une sphere étant $= \frac{2\pi r}{3} = cN$). 2°. $M = \frac{3}{k^4} - \frac{ATk}{k^5}(2 + m^2) = \frac{3}{k^4} - \frac{(k^2+3)}{k^5} \times (k - \frac{1}{3}k^3 + \frac{k^5}{5}$ &c.$) = -\frac{4}{3\cdot 5}$ à très-peu près; donc 1°. (*art.* 136) on aura $\mathcal{C} = \frac{\omega \cos.\alpha'^2 - \frac{3A^3 \cos.\alpha^2}{\delta^3}}{3 + \frac{1}{5}}$; 2°. (*art.* 137) on aura, à cause de $\frac{(k^2+3)ATk - 3k}{k^3} = \frac{4k^2}{3\cdot 5}$, l'équation $\frac{2\omega}{3} - \frac{2A^3}{3\delta^3} - \frac{2\omega \cos.\alpha'^2}{3}$ ou $\frac{2\omega \sin.\alpha'^2}{3} - \frac{2A^3}{3\delta^3} = \frac{4k^2}{3\cdot 5} - \frac{2A^3}{3\delta^3}(1 - 3\sin.\alpha^2) + \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{3}{3\cdot 5}\right)}{3 + \frac{1}{5}} \times$

$\left(\omega \text{ cos. } \alpha'^2 - \frac{3A^3 \text{ cos. } \alpha^2}{\delta^3}\right)$; équation dans laquelle on mettra à la place de $\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{3\cdot 5}}{3+\frac{1}{5}}$ sa valeur $\frac{5}{24}$.

139. On aura donc, en réduisant à l'expression la plus simple les valeurs de k^2 & de c, les équations $c = \frac{5\left(\omega \text{ cos. } \alpha'^2 - \frac{3A^3 \text{ cos. } \alpha^2}{\delta^3}\right)}{16}$, & $k^2 = \frac{3\cdot 5}{4} \times \left(\frac{2\omega \text{ sin. } \alpha'^2}{3} - \frac{5}{24}\omega \text{ cos. } \alpha'^2 - \frac{2A^3 \text{ sin. } \alpha^2}{\delta^3} + \frac{5.3A^3 \text{ cos. } \alpha^2}{24\delta^3}\right)$.

140. Si on suppose m finie, & c très-petite, il est clair qu'on pourra aisément, par des constructions & des calculs analogues à ceux du précédent Mémoire, trouver la valeur de m par le moyen de l'équation de l'*art.* 137. Je ne doute point que cette nouvelle Recherche ne donnât lieu à plusieurs remarques curieuses; mais je les abandonne à d'autres Géometres, la matiere n'ayant plus aucune difficulté.

REMARQUES

SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

(*n*) *Art.* 88. SI on révoquoit en doute la légitimité de la ſuppoſition que nous faiſons ici de ſin. $\mathfrak{C} = 0$ & ſin. $\mathfrak{C}' = 0$, on pourroit s'en aſſurer de deux manieres. 1°. Par le moyen des deux proportions des *art.* 89 & 90, en mettant au lieu des forces parallèles à x, y, z, leurs valeurs générales; car les équations déduites de ces propoſitions donneront des valeurs de $\frac{3A^3}{\omega \delta^3}$ qui ne pourront être égales qu'en ſuppoſant $\mathfrak{C} = 0$, & $\mathfrak{C}' = 0$. 2°. On peut conſidérer encore que ſi on fait d'abord abſtraction du mouvement de rotation, le ſphéroïde ſera un ſolide de révolution dont l'axe ſera dans la ligne δ qui joint les deux Planetes, & dont toutes les coupes paſſant par cette ligne δ ſeront ſemblables & égales. Imaginant donc maintenant la coupe qui paſſe par δ & par l'axe autour duquel doit ſe faire la rotation, on verra facilement que les deux parties du ſolide des deux côtés de cette coupe ſeront néceſſaire-

ment ſemblables & égales ; d'où il eſt aiſé de conclure qu'elles demeureront encore ſemblables & égales nonobſtant la rotation, puiſqu'il n'y a point de raiſon pour que l'une differe de l'autre ; donc, &c.

Nous venons de dire qu'en calculant d'une maniere générale les deux proportions des *art.* 89 & 90, il en réſulte ſin. $\mathfrak{G} = 0$, & ſin. $\mathfrak{G}' = 0$. Nous donnerons ici ce calcul, parce qu'il nous ſervira dans la ſuite de ces Recherches. On aura d'abord (*art.* 82, 86, 89), en prenant les valeurs générales des forces, & ne ſuppoſant point $\mathfrak{G}$ & $\mathfrak{G}' = 0$, la proportion $\frac{2cA''x}{3} + \frac{2cA^3x}{3\delta^3} - \frac{2cA^3}{3\delta^3}$ ($3x$ cof. $\mathfrak{G}^2 \times$ cof. $\alpha^2 + 3y$ cof. α^2 ſin. $\mathfrak{G}$ cof. $\mathfrak{G} + 3z$ ſin. α cof. α cof. $\mathfrak{G}$) $+ \frac{2c\omega}{3}$ ($-x + x$ cof. $\mathfrak{G}'^2$ cof. $\alpha'^2 + y$ cof. α'^2 ſin. $\mathfrak{G}'$ cof. $\mathfrak{G}' + z$ ſin. α' cof. α' cof. $\mathfrak{G}'$) : $\frac{2cA'''y}{3} + \frac{2cA^3y}{3\delta^3} - \frac{2cA^3}{3\delta^3} \times$ ($3x$ cof. α^2 cof. $\mathfrak{G}$ ſin. $\mathfrak{G} + 3y$ cof. α^2 ſin. $\mathfrak{G}^2 + 3z$ cof. α ſin. α ſin. $\mathfrak{G}$) $+ \frac{2c\omega}{3} \times$ ($-y + y$ ſin. $\mathfrak{G}'^2$ cof. $\alpha'^2 + x$ cof. $\mathfrak{G}'$ ſin. $\mathfrak{G}'$ cof. $\alpha'^2 + z$ ſin. α' cof. α' ſin. $\mathfrak{G}'$) :: $m'm'x : y$; d'où l'on tire les équations ſuivantes,

1°. $- \frac{A^3}{\delta^3} \times 3yy$ cof. α^2 ſin. $\mathfrak{G}$ cof. $\mathfrak{G} + \omega \times yy$ ſin. $\mathfrak{G}'$ cof. $\mathfrak{G}'$ cof. $\alpha'^2 = 0$, ou ce qui eſt la même choſe $\frac{A^3}{\delta^3\omega} = \frac{\text{ſin. } \mathfrak{G}' \text{ cof. } \mathfrak{G}' \text{ cof. } \alpha'^2}{3 \text{ ſin. } \mathfrak{G} \text{ cof. } \mathfrak{G} \text{ cof. } \alpha^2}$.

2°. $-\frac{A^3}{\delta^3} \times 3\zeta y$ sin. α cos. α cos. $\mathfrak{C} + \omega \times \zeta y$ sin. α' cos. α' cos. $\mathfrak{C}' = 0$, ou $\frac{A^3}{\delta^3 \omega} = \frac{\text{sin. } \alpha' \text{ cos. } \alpha' \text{ cos. } \mathfrak{C}'}{3 \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha \text{ cos. } \mathfrak{C}}$.

3°. $-\frac{A^3 m' m'}{\delta^3} \times 3xx$ cos. α^2 cos. $\mathfrak{C}$ sin. $\mathfrak{C} + \omega m' m' \times xx$ cos. α'^2 cos. $\mathfrak{C}'$ sin. $\mathfrak{C}' = 0$, ce qui donne le même réſultat que la premiere équation.

4°. $-\frac{A^3 m' m'}{\delta^3} \times 3\zeta x$ cos. α ſin. α ſin. $\mathfrak{C} + \omega m' m' \times \zeta x$ cos. α' ſin. α' ſin. $\mathfrak{C}' = 0$, ou bien $\frac{A^3}{\delta^3 \omega} = \frac{\text{sin. } \alpha' \text{ cos. } \alpha' \text{ sin. } \mathfrak{C}'}{3 \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha \text{ sin. } \mathfrak{C}}$, comme dans la ſeconde équation.

La quatriéme & la ſeconde équation donnent $\frac{\text{sin. } \mathfrak{C}'}{\text{sin. } \mathfrak{C}} = \frac{\text{cos. } \mathfrak{C}'}{\text{cos. } \mathfrak{C}}$ ou tang. $\mathfrak{C}'$ = tang. $\mathfrak{C}$, & $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$; la premiere & la ſeconde équation donnent $\frac{\text{sin. } \mathfrak{C}' \text{ cos. } \alpha'}{\text{sin. } \mathfrak{C} \text{ cos. } \alpha} = \frac{\text{sin. } \alpha'}{\text{sin. } \alpha}$, d'où réſulte, ou ſin. $\mathfrak{C}$ & ſin. $\mathfrak{C}' = 0$, ou à cauſe de $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$, tang. α' = tang. α, & $\alpha' = \alpha$. Mais ce dernier réſultat ne ſauroit être vrai, 1°. parce que l'axe de rotation & la ligne qui joint le centre de la Planete attirée à la Planete attirante, ne ſont pas ſuppoſées la même ligne. 2°. Parce qu'on a d'ailleurs, en ſuppoſant $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}$, l'équation $\frac{3A^3}{\omega \delta^3} = \frac{\text{sin. } \alpha' \text{ cos. } \alpha'}{\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha} = \frac{\text{sin. } 2\alpha'}{\text{sin. } 2\alpha}$, & qu'ainſi le rapport de α' & de α dépend de celui de $\frac{A^3}{\delta^3}$ & ω. Donc $\mathfrak{C}$ & $\mathfrak{C}' = 0$.

Si

Si on vient maintenant à la proportion de l'*art.* 90, en prenant les expreſſions générales des forces, on trouvera

$$\frac{2cA\zeta}{3}+\frac{2cA^3\zeta}{3\delta^3}-\frac{2cA^3}{3\delta^3}\times(3\zeta\ \text{ſin.}\ \alpha^2+3x\ \text{cof.}\ \mathcal{C}\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \alpha+3y\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \alpha)-\frac{2c\omega}{3}(\zeta\ \text{cof.}\ \alpha'^2-x\ \text{cof.}\ \mathcal{C}'\ \text{cof.}\ \alpha'\ \text{ſin.}\ \alpha'-y\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}'\ \text{cof.}\ \alpha'\ \text{ſin.}\ \alpha'):\frac{2cA''y}{3}+\frac{2cA^3y}{3\delta^3}-\frac{2cA^3}{3\delta^3}\times(3x\ \text{cof.}\ \alpha^2\ \text{cof.}\ \mathcal{C}\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}+3y\ \text{cof.}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}^2+3\zeta\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \mathcal{C})+\frac{2c\omega}{3}\times(-y+y\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}^2\times\text{cof.}\ \alpha'^2+x\ \text{cof.}\ \mathcal{C}'\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}'\ \text{cof.}\ \alpha'^2+\zeta\ \text{ſin.}\ \alpha'\ \text{cof.}\ \alpha'\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}')::\zeta:mmy$$; d'où l'on tire

1°. $-\frac{A^3mm}{\delta^3}\times 3xy\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{cof.}\ \mathcal{C}+\omega mmxy\times\text{cof.}\ \alpha'\ \text{ſin.}\ \alpha'\ \text{cof.}\ \mathcal{C}'=0$, équation qui donne le même réſultat que la ſeconde des équations tirées de la premiere proportion.

2°. $-\frac{A^3mm}{\delta^3}\times 3yy\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}+\omega mm\times yy\ \text{cof}\ \alpha'\ \text{ſin.}\ \alpha'\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}'=0$, équation qui donne le même réſultat que la quatriéme des précédentes.

3°. $-\frac{A^3}{\delta^3}\times 3x\zeta\ \text{cof.}\ \alpha^2\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}\ \text{cof.}\ \mathcal{C}+\omega x\zeta\times\text{cof.}\ \alpha'^2\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}'\ \text{cof.}\ \mathcal{C}'=0$, ce qui donne le même réſultat que la premiere des équations précédentes.

4°. Enfin $-\frac{A^3}{\delta^3}\zeta\zeta\ \text{cof.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \alpha\ \text{ſin.}\ \mathcal{C}+\omega\zeta\zeta\ \text{ſin.}$

α' cof. α' ſin. $\mathfrak{C}' = 0$, ce qui donne encore le même réſultat que la quatriéme des précédentes. Ainſi la ſeconde proportion ne donne aucune équation nouvelle; & toutes deux s'accordent à donner le même réſultat de $\mathfrak{C} = 0$ & $\mathfrak{C}' = 0$.

* Je n'ai point fait mention dans cette Remarque des équations dont tous les membres auroient xy pour facteur dans le cas de l'*art.* 89, & zy dans celui de l'*art.* 90, parce que ces équations, en ſuppoſant (comme on vient de prouver qu'on le peut) $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{C}' = 0$, ne ſont autre choſe que les ſecondes équations des *art.* 89 & 90.

(*o*) *Art.* 98. Si dans les formules de la page 152 de nos *Recherches ſur la cauſe des Vents*, on met α pour $-\alpha$, & ϵ pour $-\alpha-\mathfrak{C}$, (c'eſt-à-dire, $\alpha-\mathfrak{C}$), parce que les quantités que nous nommons ici α & ϵ, ſont dans l'endroit cité $-\alpha$, & $-\alpha-\mathfrak{C}$; on aura à ſubſtituer $\epsilon-\alpha$ pour $-\mathfrak{C}$; & enfin, ſubſtituant encore $2c$ pour $4n$, on aura au lieu des trois formules d'attraction données dans l'endroit cité,

$$\frac{2cr}{3}\left(1+\frac{2\alpha}{5}+\frac{2\epsilon}{5}\right)$$
$$\frac{2cr}{3}\left(1+\frac{\alpha}{5}+\frac{2\epsilon}{5}\right)$$
$$\frac{2cr}{3}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{2\alpha}{5}\right).$$

Or il eſt aiſé de voir que ces trois formules s'accordent avec celles des *art.* 97 & 98, en mettant $\frac{2}{5}$ pour A.

(*p*) *Art.* 110. Si r eſt conſtant, c'eſt-à-dire, ſi $\alpha = 0$, alors $dr = 0$, & le numérateur ainſi que le dénominateur de la différentielle deviennent $= 0$, ce qui ne fait rien connoître; mais en reprenant pour lors la différentielle de l'*art.* 108, on voit aiſément qu'elle ſe réduit à une quantité de cette forme $Ad\zeta \cos. \zeta^2$, dont l'intégration n'a aucune difficulté.

(*q*) *Article* 111. Si l'on veut que la différentielle $\frac{d\mu\sqrt{[\mu^2(1-\epsilon^2)-\epsilon^2]}}{\sqrt{[(\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2-1)\mu^2+\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2]}}$ ſe réduiſe à un ſimple arc d'ellipſe, il faut qu'on puiſſe lui donner cette forme $\frac{d\mu\sqrt{(\omega+\gamma\mu^2)}}{k\sqrt{(-\mu^2+\omega)}}$, ω étant un nombre poſitif, γ étant un nombre poſitif ou négatif, & k une quantité conſtante quelconque, mais réelle; ce qui donnera $\omega\mu^2k^2(1-\epsilon^2)-\epsilon^2k^2\omega-\mu^4k^2(1-\epsilon^2)+\mu^2\epsilon^2k^2 = \omega(\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2-1)\mu^2+\epsilon^2\alpha^2\omega+\epsilon^2\omega+\gamma\mu^4\times(\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2-1)+\gamma\mu^2(\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2)$; équation qui doit avoir lieu quelle que ſoit μ, & d'où l'on tire $\omega k^2-\omega k^2\epsilon^2+\epsilon^2k^2 = \omega(\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2-1)+\gamma(\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2)$; $-k^2(1-\epsilon^2) = \gamma(\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2-1)$; & enfin $-\epsilon^2k^2 = \epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2$, & par conſéquent $k^2 = -\alpha^2-1$; $\frac{\alpha^2+1}{\gamma} = \frac{\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2-1}{1-\epsilon^2}$ ou $\gamma = \frac{(\alpha^2+1)(1-\epsilon^2)}{\epsilon^2\alpha^2+\epsilon^2-1}$; & ces valeurs de k^2 & de γ ſubſtituées dans la premiere des trois équations donneront la valeur de ω qui doit être poſitive.

Mais il eſt aiſé de voir que les conditions ne peuvent être remplies; car k^2 devant être poſitive ne ſauroit être $= -a^2 - 1 = -\frac{bb}{cc}$; ainſi la différentielle ne peut ſe réduire à un arc d'ellipſe.

Pour que la différentielle $\frac{d\mu\sqrt{[\mu^2(1-\zeta^2)-\zeta^2]}}{\sqrt{[(\zeta^2a^2+\zeta^2-1)\mu^2+\zeta^2a^2+\zeta^2]}}$ ſe réduisît à la rectification d'un ſimple arc d'hyperbole, il faudroit qu'on pût lui donner cette forme $\frac{d\mu\sqrt{(\gamma\mu^2\pm\omega)}}{k\sqrt{(\mu^2\pm\omega)}}$, ω étant une quantité poſitive, γ une quantité poſitive $> \omega$, & $= \omega + \sigma$, & k une quantité réelle & conſtante quelconque; ce qui donneroit $\gamma\mu^4 \times (\zeta^2a^2+\zeta^2-1) \pm (\zeta^2a^2+\zeta^2-1)\omega\mu^2 + \gamma\mu^2 \times (\zeta^2a^2+\zeta^2) \pm \omega(\zeta^2a^2+\zeta^2) = k^2\mu^4(1-\zeta^2) \pm \omega k^2\mu^2(1-\zeta^2) - k^2\zeta^2\mu^2 \mp \omega k^2\zeta^2$. En comparant terme à terme, & commençant par ceux qui ne contiennent point μ, on trouve, comme dans le calcul précédent, $-k^2 = a^2 + 1$, ce qui eſt impoſſible. Donc la différentielle ne peut ſe réduire ni à un ſimple arc d'ellipſe ni à un ſimple arc d'hyperbole.

(*r*) *Art.* 114. Si $b = c$, ce qui donne $\epsilon = 1$, le ſphéroïde devient un ſolide de révolution autour de l'axe CR, (Fig. 25); & la différentielle qui multiplie $\log.\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)$ dépend alors des logarithmes ou des arcs de cercle.

Il en ſera de même ſi $b = c$, ce qui donne $\mathfrak{N} = 0$;

ϖ constant & par conséquent $d\varpi = 0$, & un solide de révolution autour de AC.

Enfin si $a = c$, ce qui donne un nouveau solide de révolution autour de CK, on aura $1 + s^2 = t^2$, & la différentielle se réduit encore aux logarithmes ou aux arcs de cercle.

Dans le second de ces trois cas, le numérateur & le dénominateur de la différentielle étant égaux à zéro, il faut avoir recours à la différentielle non transformée, affectée de du & d'une fonction de la constante σ, & l'intégration se réduira à celle de $A\,du$, A étant constant.

Dans le premier & le troisiéme cas, l'intégration pourroit être assez compliquée, si on opéroit sur la formule du présent article. Mais elle deviendra plus simple par la méthode de M. Maclaurin, à laquelle il faut alors avoir recours; & on peut remarquer 1°. que l'intégrale totale & complette de notre formule, en faisant $\rho = b$ ou $\rho = a$, doit être la même dans les deux cas pour le point A, placé pour lors dans l'équateur. 2°. Que cette intégrale doit être la même que celle qui résulte de la méthode plus simple de M. Maclaurin.

(*f*) *Art.* 115. Pour trouver ces attractions, je considere d'abord que l'attraction qu'une ligne MN (Fig. 28), coupée en deux parties égales au point L par la perpendiculaire LC, exerce sur un point élevé perpendiculairement en C au-dessus du plan MCN à la dis-

tance a, eſt (en nommant LP, x, & CL, ζ) égale à $2\int\frac{a\,dx}{(a^2+\zeta^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2a.LM}{(a^2+\zeta^2)\sqrt{(a^2+\zeta^2+LM^2)}}$.

Imaginant donc l'ellipſe $PMRNQ$ (Fig. 29), & nommant le demi-axe CR, δ, le demi-axe CQ, ϵ, & $CL = y$, on aura $LM = \sqrt{(\delta^2 - y^2)} \times \frac{\epsilon}{\delta}$, & l'attraction de l'ellipſe totale ſur le point dont il s'agit ſera égale à l'intégrale complette de $\left(4a\,dy \times \frac{\epsilon}{\delta}\right) \times \frac{\sqrt{(\delta^2-y^2)}}{(a^2+y^2)\sqrt{\left(a^2+y^2+\epsilon^2-\frac{\epsilon^2y^2}{\delta^2}\right)}}$, cette intégrale étant priſe de maniere qu'elle ſoit $= 0$ quand $y = 0$, & complette quand $y = \delta$.

Cette quantité différentielle ſe réduit à deux de cette forme $\frac{A\,dy}{a^2+y^2} \times \frac{1}{\sqrt{(\delta^2-y^2)}.\sqrt{\left[a^2+\epsilon^2+\left(1-\frac{\epsilon^2}{\delta^2}\right)y^2\right]}} + \frac{B\,dy}{\sqrt{(\delta^2-y^2)}.\sqrt{\left[a^2+\epsilon^2+\left(1-\frac{\epsilon^2}{\delta^2}\right)y^2\right]}}$; le ſecond membre s'intégre aiſément par des arcs de ſections coniques ; mais le premier dépend de la quadrature d'une ligne du troiſiéme ordre. Voyez *Mém. de Berlin* 1748.

On peut trouver d'une autre maniere l'attraction de cette ellipſe, en conſidérant que l'attraction de la ligne CM ſur le point dont il s'agit eſt (en nommant CP', z) $a\int\frac{dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a.CM}{a^2(a^2+CM^2)^{\frac{1}{2}}}$. Donc ſi on fait l'angle $RCM = s$, l'attraction du ſecteur infiniment

petit CMm ſera $a\,dt\int\frac{z\,dz}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = a\,dt\left[\frac{-1}{(a^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a}\right] = a\,dt\left[\frac{-1}{(a^2+CM^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a}\right]$; donc (à cauſe de $CM^2 = \frac{t^2}{1+\left(\frac{1}{f^2}-1\right)\text{cof. }t^2}$), l'attraction de l'ellipſe totale ſera égale à l'intégrale de $+4\,dt - 4a\times\int\frac{dt}{\left(a^2+\frac{t^2}{1+\left(\frac{1}{f^2}-1\right)\text{cof. }t^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$. Cette intégrale doit être $= 0$ quand $t = 0$, & complette quand $t = 90^\circ$ ou $\frac{2c}{4}$.

En faiſant $\text{cof. }t = x$, $\frac{1}{f^2}-1 = y^2$, on verra que la quantité qui eſt ſous le ſigne $\int$ dépend de l'intégration de $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\times\frac{\sqrt{(1+y^2x^2)}}{\sqrt{(a^2+a^2y^2x^2+x^2)}}$, qui étant multipliée haut & bas par $\frac{\sqrt{(1+y^2x^2)}}{\sqrt{(1+y^2x^2)}}$ ſe trouvera (en faiſant $x^2 = z$) dépendre en partie de la rectification des ſections coniques, & en partie de la quadrature d'une ligne du troiſiéme ordre.

On voit par ce calcul que la formule de l'attraction du ſolide elliptique ſera encore plus compliquée que celle de la ſurface plane elliptique $P.Q.R$, & qu'ainſi il eſt inutile de donner ici la formule de cette attraction, celle de l'*art.* 111 étant la plus ſimple de toutes, quoique déja très-compliquée elle-même.

(*t*) *Art.* 119. Si donc on a un ſphéroïde elliptique dont les axes ſoient $2r$, $2rm'$, $2rm'(1-\mathfrak{C}')$, ($\mathfrak{C}'$ étant toujours ſuppoſé fort petit); l'attraction à l'extrémité de l'axe $2r$ ſera $4\pi r\left(\frac{m'^2}{k^2}-\frac{m'^2}{k^3}ATk'\right)-2\pi\mathfrak{C}'m'^2\times\left[-\frac{3}{k^4}+\frac{ATk}{k^5}(2+m'^2)\right]$. Or ſuppoſons préſentement que le demi-axe rm' ſoit le même que le demi-axe $rm(1-\mathfrak{C})$, & le demi-axe $rm'(1-\mathfrak{C}')$ le même que le demi-axe rm, on aura $m'=m(1-\mathfrak{C})$, & $1-\mathfrak{C}'=\frac{m}{m'}=\frac{1}{1-\mathfrak{C}}=1+\mathfrak{C}$; donc $\mathfrak{C}'=-\mathfrak{C}$, & $\frac{m'^2}{k^2}-\frac{m'^2}{k^3}ATk'=$ (*art.* 117) $\frac{m^2}{k^2}-\frac{m^2}{k^3}ATk-m^2\mathfrak{C}\times\left[-\frac{3}{k^4}+\frac{ATk}{k^5}(2+m^2)\right]$; faiſant donc les ſubſtitutions, on trouvera pour l'attraction du ſphéroïde à l'extrémité de l'axe $2r$, la même valeur trouvée dans l'*art.* 119; ce qui doit être, puiſque c'eſt le même ſphéroïde, dans lequel on a ſeulement transformé l'un dans l'autre les axes CR & CK, ce qui ne change rien à l'attraction en A, & prouve la bonté de nos calculs. Voyez dans l'*Appendice* à la fin de ce Vol. l'Addition à la p. 187.

(*u*) *Art.* 135. On remarquera de plus 1°. que dans la premiere formule (*art.* 134) $\mathfrak{C}$ eſt $=0$, non-ſeulement quand α & $\alpha'=90°$, mais en général quand

$\frac{3A^3}{k^3}$

$\frac{3A^3}{\delta^3}$ cos. $\alpha^2 - \omega$ cos. $\alpha'^2 = 0$, c'eſt-à-dire, quand $\frac{A^3}{\omega\delta^3} = \frac{\text{cos. } \alpha'^2}{3 \text{ cos. } \alpha^2}$. 2°. Que dans la ſeconde formule ſi on fait $G = 0$, & $m = 1$, on aura $1 - N = \frac{N}{2}$ (parce que le ſolide eſt alors une ſphere, & que l'attraction au pole eſt la même que l'attraction à l'équateur) & $- \frac{3A^3 \text{ ſin. } \alpha^2}{\delta^3} - \omega$ cos. $\alpha'^2 + \omega = 0$, ce qui donne encore $\frac{A^3}{\omega\delta^3} = \frac{\text{ſin. } \alpha'^2}{3 \text{ ſin. } \alpha^2}$. On aura donc en même-temps $m = 1$ & $G = 0$, ſi $\frac{\text{cos. } \alpha'^2}{3 \text{ cos. } \alpha^2} = \frac{\text{ſin. } \alpha'^2}{3 \text{ ſin. } \alpha^2}$, & ſi $\frac{A^3}{\omega\delta^3} = \frac{\text{cos. } \alpha'^2}{3 \text{ cos. } \alpha^2}$; la premiere condition donne tang. $\alpha^2 =$ tang. α'^2, ou tang. $\alpha = \pm$ tang. α & par conſéquent $\alpha' = \pm \alpha$.

Il ſemble donc qu'on aura à-la-fois $m = 1$, & $G = 0$, ſi $\frac{A^3}{\omega\delta^3} = \frac{1}{3}$ & ſi $\alpha' = \pm \alpha$. Mais il faut conſidérer qu'on a de plus (*art.* 89 & 90) $\frac{\text{ſin. } 2\alpha'}{\text{ſin. } 2\alpha} = \frac{3A^3}{\omega\delta^3} = 1$, ce qui donne $\alpha' = \alpha$, & non pas $\alpha' = -\alpha$. Ainſi il n'y a que la condition de $\alpha' = \alpha$, & de $\frac{A^3}{\omega\delta^3} = \frac{1}{3}$ qui donne une figure ſphérique au ſphéroïde; ſi on a ſimplement $\frac{A^3}{\omega\delta^3} = \frac{1}{3}$, & que α ne ſoit pas $= \alpha'$, c'eſt-à-dire, que la ligne δ, qui joint les centres des deux

aſtres, ne tombe point ſur l'axe de rotation, la figure du ſphéroïde ne pourra être ſphérique.

Au reſte il eſt bon de remarquer encore que le ſolide, dans le cas même de $\frac{A^3}{\omega\delta^3} = \frac{1}{3}$, & de $\alpha' = \alpha$, ne ſera pas rigoureuſement ſphérique; il ne le pourroit être que dans le cas où les forces provenantes de l'attraction du corps S ſeroient exactement telles que nous les avons ſuppoſées. Or il eſt aiſé de voir qu'elles ne le ſont pas. Voyez ci-deſſus l'*art.* 55 du *Mém. préc.* pag. 126, & la Note (*l*), pag. 156.

XLVIII. MÉMOIRE.

Suite des Recherches ſur la Figure de la Terre.

1. J'AI fait voir dans les Recherches qui ont précédé celles-ci, que ſi un fluide homogene tourne autour de ſon axe, & qu'en même-temps il ſoit attiré par un autre corps, il prendra la forme d'un ſphéroïde dont toutes les coupes par l'axe ſeront des ellipſes; & j'ai fait voir de plus que ce ſphéroïde avoit trois axes perpendiculaires l'un à l'autre, dont la poſition eſt déterminée par celle de l'axe de rotation & celle du corps attirant. Je vais préſentement ſuppoſer qu'il y ait tant de corps attirans qu'on voudra, & déterminer la figure du ſphéroïde dans cette hypothèſe. Mais pour y parvenir, j'ai beſoin des lemmes ſuivans.

2. Soit un triangle ſphérique ABC (Fig. 30), rectangle en C, on aura, comme il eſt aiſé de le prouver, cof. AB = cof. $AC \times$ cof. BC.

3. Donc ſi on a les trois côtés $FE = \gamma$, $FD = \nu$, $DE = \vartheta$ (Fig. 31) d'un triangle ſphérique, on aura,

en imaginant l'arc FG perpendiculaire à DE, & nommant EG, x, les équations cos. FE ou cos. γ = cos. $FG \times$ cos. x; & cos. FD ou cos. n = cos. $FG \times$ cos. DG = cos. $FG \times$ cos. $(\vartheta - x)$ = cos. FG cos. ϑ cos. $x +$ cos. FG sin. ϑ sin. x; donc en divisant cette seconde équation par la précédente, on aura $\frac{\text{cos. } n}{\text{cos. } \gamma}$ = cos. $\vartheta +$ sin. ϑ tang. x; donc on aura l'angle ou arc x.

4. Donc on aura FG, puisque cos. $FG = \frac{\text{cos. } \gamma}{\text{cos. } x}$; on aura aussi l'angle en E, puisque $\frac{\text{sin. } E}{\text{sin. } FG} = \frac{\text{sin. tot.}}{\text{sin. } EF} = \frac{1}{\text{sin. } \gamma}$. On aura de même l'angle en D, puisque $\frac{\text{sin. } D}{\text{sin. } FG} = \frac{\text{sin. tot.}}{\text{sin. } DF} = \frac{1}{\text{sin. } n}$ (*a*).

5. Donc si on a un triangle sphérique EGH (Fig. 32) rectangle en H, dans lequel $GH = G'$, & $EH = \alpha'$, & qu'ayant continué l'arc HE jusqu'au point D, de maniere que $HED = 90°$ (& que D soit par conséquent le pole de l'arc GHL) on suppose que l'arc $DF = \mu$ soit connu, ainsi que l'arc $EF = \gamma$, on aura un triangle sphérique DEF, dans lequel on connoîtra les trois côtés, DE étant $= 90° - \alpha'$; on aura donc (par l'*art. précéd.*) l'angle D & l'angle E. Donc on aura l'arc HL, mesure de l'angle D. Donc on aura, en nommant HL, ρ, la valeur de sin. &

(*a*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

cos. $\bar{p}$ exprimée par des sinus & cosinus de α', μ, & γ, ou de α', σ, & γ (*b*), en nommant FL, $\alpha' + \sigma$.

6. Soit maintenant un autre triangle EFD' (Fig. 33), dont les trois côtés, supposés connus, soient $EF = \gamma$, $FD' = \pi$, & $D'E = \vartheta$, tout le reste demeurant le même que dans l'article précédent; on connoîtra par les articles précédens les trois angles des triangles $D'EF$, DEF; donc on connoîtra l'angle DFD' & l'angle DED'. Donc imaginant l'arc $D'P$ perpendiculaire à DE, on connoîtra $D'P$, puisque $\frac{\text{sin. } DED'}{\text{sin. } D'P} = \frac{\text{sin. tot.}}{\text{sin. } D'E}$; donc on connoîtra EP, puisque cos. EP × cos. $D'P$ = cos. $D'E$; donc on connoîtra $DP = DE - EP$; donc on connoîtra enfin DD', puisque cos. DD' = cos. DP × cos. $D'P$.

7. Donc connoissant $EH = \alpha'$, $FL = \alpha' + \sigma$, (& par conséquent ED que j'appelle ici ϑ', & FD que j'appelle π'), $EF = \gamma$, $FD' = \pi$, & $ED' = \vartheta$, on aura HL, ou ρ, LO, & $D'O$; & les sinus & cosinus de ces arcs se trouveront par des équations linéaires ou du premier degré, en suivant le procédé qu'on vient d'indiquer dans les articles précédens (*c*).

8. Donc si on a tant de triangles sphériques qu'on voudra $D'EF$, $D''EF$ (Fig. 34), dont la base EF soit donnée, ainsi que les arcs EH, FL qui concourent au pole D de l'arc HLO, on connoîtra les arcs

(*b*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.
(*c*) Voyez *ibid.*

correſpondans HL, LO, HM, ML, & les diſtances des points D', D'' à l'arc HLO.

9. Il eſt à remarquer de plus qu'on connoîtra la diſtance des points D', D'', puiſque tout eſt connu dans les triangles $D'EF$, $D''EF$.

10. Donc puiſque connoiſſant les ſinus & coſinus de ϵ & ρ, α & σ, on connoîtra auſſi les ſinus & coſinus de $\epsilon + \rho$, $\alpha + \sigma$, il eſt viſible que connoiſſant α', ϵ', σ, (& par conſéquent η', ϑ') & de plus $EF = \gamma$, FD' & $D'E$, que j'appelle ici η, ϑ, on aura les ſinus & coſinus de $\epsilon' + \rho$, $\alpha' + \sigma$, $\epsilon' + \rho'$, $\alpha' + \sigma'$, &c. & ainſi du reſte (*d*).

11. Reprenons préſentement les équations de la Note (*n*) du Mém. XLVII, p. 198, & celles des *art.* 89 & 90 auxquels cette Note ſe rapporte, & mettons dans ces équations $\alpha' + \sigma$ au lieu de α, & $\epsilon' + \rho$ au lieu de ϵ, la quantité ρ ou HL, ou plutôt ſon ſinus & ſon coſinus étant exprimé en ſinus & coſinus de γ, α', $\alpha' + \sigma$; on aura trois équations & trois inconnues, α', σ, & ϵ', qu'on déterminera par le moyen de ces trois équations; dans ce calcul, γ marque l'angle ou arc EF compris entre l'axe de rotation & la ligne qui joint le centre de la Planete attirée, & celui de la Planete attirante (*e*).

12. S'il y a une ſeconde Planete attirante, dont la maſſe ſoit $\frac{2cA'^3}{3}$, & la diſtance Δ', & qui ſoit tel-

(*d*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.
(*e*) Voyez *ibid.*

lement placée que les angles α' & ζ' qui ſe rapportent à la premiere Planete attirante, deviennent pour la ſeconde Planete attirante, $\alpha' + \sigma'$, $\zeta' + \rho'$, EF étant toujours γ & donné, ainſi que $FD' = \eta$, & $ED' = \vartheta$, (car ces trois quantités ſont connues par la poſition donnée des deux Planetes & de l'axe de rotation); on aura par les articles précédens les valeurs des ſinus & des coſinus de $\alpha' + \sigma'$, & $\zeta' + \rho'$, en α', ζ', γ, η, ϑ; les équations de la Note (n) ſeront augmentées de termes analogues à ceux qui renferment $\frac{A'}{\delta^3}$, & il n'y aura jamais que trois inconnues à déterminer, ſavoir α', ζ' & σ (f).

13. Donc quel que ſoit le nombre des corps attirans, on aura toujours trois équations d'où l'on tirera les valeurs de α', ζ', $\alpha' + \sigma$, & $\zeta' + \rho$, c'eſt-à-dire, les poſitions des trois axes du ſphéroïde; après quoi on déterminera le rapport de ces axes par deux autres équations que fourniſſent encore les deux proportions de la Note (n) du Mém. XLVII, p. 199, & qui ſeront analogues à la ſeconde des deux équations trouvées dans chacun des *art.* 89 & 90 du même Mém. p. 172 (g).

14. M. Maclaurin, dans ſa Piéce ſur le *Flux & Reflux de la Mer*, eſt le premier qui ait fait voir que ſi un fluide ſphérique homogene tourne autour de ſon centre, ou ſi étant ſans rotation, il eſt attiré par un

(f) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

(g) Voyez *ibid.*

corps éloigné, il prendra la figure d'un ſphéroïde elliptique. Mais il n'a guères pouſſé plus loin cette Recherche. Il ſe propoſe à la vérité, dans le Cor. 5 de la Propoſ. 1, de chercher la Figure de la Terre, en ſuppoſant le Soleil & la Lune en quadrature; mais il ne paroît pas en cetendroit faire aſſez d'attention à la figure elliptique que doivent prendre les coupes du ſphéroïde dans le plan deſquelles ſe trouvent le Soleil & la Lune. J'avoue que dans la Propoſ. VIII du même Ouvrage, il ſuppoſe que toutes les coupes du ſphéroïde paſſant par l'axe où le fluide eſt le plus élevé ſeront des ellipſes; mais il le ſuppoſe, ce me ſemble, ſans le démontrer, ce qui en avoit pourtant beſoin; & c'eſt ce que nous avons fait dans notre XLVII Mémoire. Nous avons de plus démontré dans celui-ci que la figure du ſphéroïde eſt elliptique, ſi le fluide eſt homogene, s'il tourne autour d'un axe fixe, & s'il eſt en même-temps attiré par tant de corps qu'on voudra, diſpoſés entre eux & par rapport à l'axe de rotation, d'une maniere quelconque. D'ailleurs M. Maclaurin ne paroît pas donner les moyens d'aſſigner la poſition des trois axes du ſphéroïde; autre problême dont nous venons encore de donner la ſolution. Nous croyons donc que cette queſtion n'avoit point encore été réſolue dans toute la généralité & la complication dont elle eſt ſuſceptible.

15. Ce n'eſt pas tout. Nous avons encore fait voir dans le XLV & le XLVI Mémoire, que dans ces différentes hypothèſes, & même en n'ayant égard qu'à la ſeule

ſeule rotation du fluide autour de ſon axe, il y a au moins deux figures poſſibles qui donnent l'équilibre. Il eſt vrai que l'une de ces deux figures ne donne pas un équilibre ferme : mais l'équilibre n'en a pas moins lieu, & il eſt même également ferme dans les deux cas, ſi le ſphéroïde eſt ſuppoſé ſolide, comme je l'ai remarqué dans le XLV Mémoire, pag. 57, art. 33.

16. Je terminerai ces Recherches par quelques autres réflexions détachées, mais qui toutes ont rapport à la Figure de la Terre. De toutes les ſolutions qui ont été données juſqu'ici de ce problême, il n'y a de rigoureuſement exacte que celle qui ſuppoſe le ſphéroïde fluide & homogene. Toutes les autres ne ſont qu'approchées ; de maniere que dans toutes ces autres figures l'équilibre n'a lieu qu'aux quantités près de l'ordre de α^2, α étant l'excès d'un des axes du ſphéroïde ſur l'autre. Il faut donc ſuppoſer, pour rendre la ſolution complette, qu'en altérant ces figures d'une quantité de l'ordre de α^2, l'équilibre ſera rigoureux & exact. Cette ſuppoſition paroît en effet très-naturelle & très-vraiſemblable ; mais cependant il faut convenir qu'elle n'eſt pas rigoureuſement démontrée, & qu'il ſeroit d'ailleurs très-difficile d'aſſigner analytiquement la quantité dont il faut altérer la figure du ſphéroïde, cette quantité n'étant pas (au moins dans tous les cas) celle qui conviendroit à une figure rigoureuſement elliptique, comme nous l'avons prouvé Tom. V de nos Opuſc. p. 37, art. 83, pour le cas particulier d'un noyau ſphérique recouvert de fluide.

17. Par la même raiſon, quand nous avons dit (*) que ſi la force centrifuge $\varphi = 0$, & que $5\Delta = 3\delta$, Δ étant la denſité du noyau, & δ celle du fluide, α ſera tout ce qu'on voudra, en le ſuppoſant néanmoins toujours très-petit, cela veut dire ſeulement en rigueur que ſi α eſt très-petit & tout ce qu'on voudra, le ſphéroïde ſera en équilibre à une quantité près de l'ordre de α^2.

18. Si 5Δ n'eſt pas $= 3\delta$, alors $\varphi = 0$ donne $\alpha = 0$; & il peut paroître ſingulier que α ſoit $= 0$ abſolu & rigoureux tant que 5Δ n'eſt pas $= 3\delta$, mais qu'il devienne tout ce qu'on voudra (quoique toujours très-petit) dès que $5\Delta = 3\delta$. Néanmoins ce paradoxe, ſi c'en eſt un, n'eſt pas plus ſurprenant que celui de l'équation $xy = 0$, qui donne $x = 0$, tant que y n'eſt pas $= 0$, & qui donne x égale à tout ce qu'on voudra dès que $y = 0$. On peut encore ſe rappeller à cette occaſion le paradoxe de l'attraction d'une ſurface ſphérique, qui eſt rigoureuſement nulle quand le point attiré eſt placé au-dedans de la ſurface, quelque près qu'il en ſoit, mais qui ne l'eſt plus lorſque le point eſt placé ſur cette ſurface même, & qui change encore très-conſidérablement de valeur ſi le point eſt placé hors de la ſurface, & auſſi près qu'on voudra. Voyez le Tome 1 de nos Opuſcules, pag. 257 & ſuiv. Il n'eſt pas plus ſurprenant d'ailleurs qu'il y ait une infinité de figures

(*) Voyez les *Recherches ſur la cauſe des Vents*, pag. 43, & le Tome 2 des Opuſcules, pag. 255.

pour l'équilibre d'un ſphéroïde en certains cas, qu'il ne l'eſt qu'il y ait une infinité de poſitions de levier qui donnent l'équilibre; & nous avons vu de plus, dans les Mémoires précédens, que même dans le ſphéroïde homogene, il y a plus d'un cas poſſible d'équilibre.

19. Au reſte, pour traiter cette queſtion d'une maniere plus rigoureuſe & plus analytique, ſoit en général Z la force dirigée vers le centre du ſphéroïde, Z' la force perpendiculaire à celle-là, r le rayon du ſphéroïde, & z l'angle compris entre le rayon r & l'axe, on aura rigoureuſement $\frac{dr}{r\,dz} = \frac{Z'}{Z}$.

20. Si le ſphéroïde eſt elliptique & homogene, & que b ſoit le demi-axe, & c le demi-diametre de l'équateur, E l'attraction à l'équateur, P l'attraction au pole, & F la force centrifuge à l'équateur, on trouvera facilement que $Z' = -\frac{(E-F)\,\text{ſin.}\,2z \times r}{2c} + \frac{Pr\,\text{ſin.}\,2z}{2b}$; & que $Z = \frac{(E-F)\,\text{ſin.}\,z^2 \times r}{c} + \frac{Pr\,\text{cof.}\,z^2}{b}$. De plus $rr = \frac{bb}{1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{ſin.}\,z^2}$; ainſi dans le cas préſent l'équation $\frac{dr}{r\,dz} = \frac{Z'}{Z}$ devient

$$\frac{\left(1+\frac{bb}{cc}\right)\frac{\text{ſin.}\,2z}{2}}{1+\left(\frac{bb}{cc}-1\right)\text{ſin.}\,z^2} = \frac{\text{ſin.}\,2z}{2} \times \frac{\frac{F}{b}-\frac{(E-F)}{c}}{\frac{P}{b}+\left(\frac{E-F}{c}-\frac{P}{b}\right)\text{ſin.}\,z^2},$$

équation qui ſera identique, pourvû qu'on ait $1 -$

$\frac{bb}{cc} = 1 - \frac{(E-F)b}{cP}$, ou $\frac{E-F}{P} = \frac{b}{c}$; ce qui s'accorde avec ce qu'on ſait d'ailleurs par la Théorie de M. Maclaurin.

21. Suppoſons maintenant que le rayon r devienne $r + r'$, la force Z', $Z' + \zeta'$, & la force Z, $Z + \zeta$, on aura $\frac{dr + dr'}{(r+r')dz} = \frac{Z'+\zeta'}{Z+\zeta}$, ou $\frac{dr}{rdz} - \frac{r'dr}{rdz(r+r')} + \frac{dr'}{(r+r')dz} = \frac{Z'}{Z} - \frac{Z'\zeta}{Z(Z+\zeta)} + \frac{\zeta'}{Z+\zeta}$, ou (à cauſe de $\frac{dr}{rdz} = \frac{Z'}{Z}$) $- \frac{r'dr}{rdz(r+r')} + \frac{dr'}{(r+r')dz} = - \frac{Z'\zeta}{Z(Z+\zeta)} + \frac{\zeta'}{Z+\zeta}$.

22. Qu'on imagine au centre du ſphéroïde, ſuppoſé d'abord homogene & en équilibre, un noyau ſphérique de la denſité Δ & du rayon ρ, la denſité du fluide étant δ; il eſt aiſé de voir que la partie de l'attraction du ſphéroïde dirigée vers le centre ſera augmentée de $\frac{4\pi\rho^3(\Delta-\delta)}{3r}$ (2π étant le rapport de la circonférence au rayon) & que l'attraction perpendiculaire au rayon r demeurera la même, le ſphéroïde étant ſuppoſé ne point changer de figure. Mais il eſt clair en même-temps que le ſphéroïde changera de figure en effet, puiſque l'attraction verticale eſt altérée par le noyau, l'attraction horizontale reſtant la même.

23. Cela poſé, lorſque le ſphéroïde eſt elliptique, & ρ très-petit, b étant le demi-axe, le rayon eſt rigoureu-

ſement égal, non pas à $b(1+\alpha \text{ ſin. } \zeta^2)$, mais à $b[1+\alpha \text{ ſin. } \zeta^2+\alpha\Delta'(\alpha,\zeta)]$, $\Delta'(\alpha,\zeta)$ étant une fonction de α & de ſinus & coſinus de l'angle ζ, laquelle doit être $=0$ quand $\alpha=0$; l'attraction horizontale, le noyau étant toujours ſuppoſé ſphérique, ſera $\frac{4\pi\delta\alpha b}{5}\times \text{ ſin. } 2\zeta+\frac{4\delta\pi\alpha\Delta''(\alpha,\zeta)}{5}$; la force centrifuge dans ce même ſens ſera $\frac{p\varphi \text{ ſin. } 2\zeta}{2}+p\varphi\alpha\times\Gamma(\alpha,\zeta)$, p étant la peſanteur à l'équateur, & $p\varphi$ la force centrifuge. L'attraction verticale, c'eſt-à-dire, l'attraction dirigée vers le centre, ſera, en ſuppoſant la lame de fluide très-petite, $\frac{4\pi\Delta b}{3}+\frac{4\pi\alpha\Delta'''(\alpha,\zeta,\Delta,\delta)}{3}$, & la force centrifuge $p\varphi$ ſin. $\zeta^2+p\varphi\alpha\Gamma'(\alpha,\zeta)$; enfin on aura $\frac{dr}{rd\zeta}=(\alpha+\alpha\varphi'\alpha) \text{ ſin. } 2\zeta+\alpha\varphi''(\alpha,\zeta)$, $\varphi'\alpha$, & $\varphi''(\alpha,\zeta)$ étant des fonctions de α, & de α,ζ, & devant être $=0$ lorſque $\alpha=0$; de ſorte que l'équation $\frac{dr}{rd\zeta}=\frac{Z'}{Z}$ deviendra en ce cas $(\alpha+\alpha\varphi'\alpha) \text{ ſin. } 2\zeta+\alpha\varphi''(\alpha,\zeta)=[3\delta\alpha b.4\pi \text{ ſin. } 2\zeta+3.4\pi\delta\alpha\times\Delta''(\alpha,\zeta)+\frac{3\varphi p.5 \text{ ſin. } 2\zeta}{2}+5.3\varphi p\alpha\Gamma(\alpha,\zeta)]:[5\Delta b\times 4\pi+5\alpha.4\pi\Delta'''(\alpha,\zeta,\Delta,\delta)+5.3\varphi p \text{ ſin. } \zeta^2+5.3\varphi p\alpha\Gamma'(\alpha,\zeta)]$; tous les termes de cette équation devront être ſéparément égaux à zéro, & devront tous donner une même valeur de α; cette même équation, réduite & ſimplifiée, donnera par le moyen de ſes pre-

mier termes, de ceux qui contiennent ſin. 2ζ, la condition $\alpha\left(1-\frac{3\delta}{5\Delta}\right)=\frac{\varphi}{2}$, ou en faiſant $\delta=\Delta+f\Delta$, $\alpha\left(\frac{2}{5}-\frac{3f}{5}\right)=\frac{\varphi}{2}$. Mais cette équation, comme nous venons de le dire (*art.* 16 *& ſuiv.*), ne donne l'équilibre qu'à très-peu près. Imaginons préſentement que le rayon du ſphéroïde elliptique ſoit augmenté de la quantité σ, comme il le doit être pour l'équilibre exact & rigoureux; l'équation de l'équilibre donnera $\alpha\left(\frac{2}{5}-\frac{3f}{5}\right)\times$ ſin. $2\zeta+\alpha\Pi(\alpha,\zeta)+\frac{d\sigma'}{d\zeta}=\frac{\varphi\text{ ſin. }2\zeta}{2}+\varphi.\sigma''$; ſoit $\varphi=0$ & il faudra, pour que $2-3f=0$ donne α égal à tout ce qu'on voudra, que $\alpha\Pi(\alpha,\zeta)+\frac{d\sigma'}{d\zeta}=0$; & comme la quantité ou le terme $\alpha\Pi(\alpha,\zeta)$, qui vient du ſphéroïde elliptique, peut renfermer un terme de cette forme $\alpha\Xi\alpha\times$ ſin. 2ζ, $\Xi\alpha$ étant une fonction de α, laquelle devient $=0$ lorſque $\alpha=0$, il faudra que la quantité σ ſoit telle que le terme $\frac{d\sigma'}{d\zeta}$ renferme une quantité de cette forme α ſin. $2\zeta\times\Pi'(\alpha,f)$, & qu'en faiſant $2-3f=0$ ou $f=\frac{2}{3}$, la quantité $\Xi\alpha+\Pi'(\alpha,f)$ ſoit $=0$.

24. Voilà, ce me ſemble, à quoi ſe réduit le peu de lumieres que l'analyſe peut nous donner ſur ce ſujet. Il n'en réſultera pas ſans doute en rigueur géométrique que $2=3f$ donne α égal à tout ce qu'on voudra, quand $\varphi=0$; mais puiſque le ſphéroïde eſt alors en

équilibre à une quantité près de l'ordre de a^2, il me ſemble qu'on eſt en droit de conclure de-là, qu'en donnant à cette figure un changement infiniment petit du ſecond ordre, on aura un equilibre parfait; & qu'ainſi puiſqu'il y a une infinité de figures, où il ne s'en faut que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre que l'équilibre ne ſoit rigoureux, il y en aura une infinité où l'équilibre pourra ſubſiſter rigoureuſement. J'avoue qu'il n'eſt peut-être pas facile de démontrer rigoureuſement que quand une figure eſt en équilibre à un infiniment petit du ſecond ordre près, on peut toujours ſuppoſer une figure qui ne différera de celle-là que d'un infiniment petit du ſecond ordre, & qui donnera l'équilibre rigoureux. Mais il me ſemble que cette ſuppoſition eſt bien plauſible. 1°. Parce que les changemens infiniment petits du ſecond ordre, qu'on peut ſuppoſer à la figure, pouvant être différens à l'infini, & même n'être pas ſuppoſés elliptiques, il eſt naturel de penſer qu'il y aura enfin un de ces changemens d'où réſultera l'équilibre parfait; quoique la figure réſultante de ce changement ſoit très-difficile & peut-être impoſſible à aſſigner par l'analyſe connue. 2°. Parce que tous ceux qui ont traité juſqu'à préſent le problême de la Figure de la Terre, dans l'hypothèſe de l'hétérogénéité & de la fluidité de ſes parties, & qui ont encore trouvé dans ce cas la figure elliptique, ne l'ont trouvée qu'à peu près, enſorte que pour la légitimité de leur ſolution, il faut néceſſairement admettre le principe que nous ſup-

poſons ici. Quoi qu'il en ſoit, j'abandonne cette queſtion à l'examen & à la déciſion des Géometres.

25. Nous avons trouvé dans le XLV Mémoire, §. II, *art.* 13, p. 50, $\frac{2\omega}{3} = \frac{(k^2+3)\mathcal{A}Tk - 3k}{k^3}$. Lorſque ω eſt fort petit, on a k tout-à-la-fois fort petit & fort grand; pour avoir k fort petit, on prendra $2\omega = \frac{4k^2}{5}$, comme on l'a vu ci-deſſus p. 50; & pour avoir k fort grand, on ſuppoſera $\mathcal{A}Tk$ égal à près de 90°, c'eſt-à-dire, en nommant $4\pi'$ le rapport de la circonférence au rayon, qu'on aura $\mathcal{A}Tk = \pi' - \delta$, δ étant fort petit. Or il n'eſt pas difficile de voir que δ eſt à très-peu près la cotangente de l'angle $\mathcal{A}Tk$ ou $\pi' - \delta$, enſorte que k eſt à très-peu près $= \frac{1}{\delta}$; on aura donc à très-peu près $\frac{2\omega}{3} = \frac{(1+3\delta\delta)(\pi'-\delta) - 3\delta}{\delta\delta} : \left(\frac{1}{\delta^3}\right)$ ou $\frac{2\omega}{3} = \pi'\delta$, & par conſéquent k ou $\frac{1}{\delta} = \frac{3\pi'}{2\omega}$.

26. De-là il réſulte que quand ω eſt très-petit, & k fort grand, ſi on augmente ou qu'on diminue ω d'une quantité très-petite, mais cependant comparable à ω, la grande valeur de k diminuera ou augmentera conſidérablement.

27. Il n'en ſera pas de même quand les deux valeurs de k ſeront finies, & d'une grandeur médiocre, ou, ce qui revient au même, quand ω ne ſera pas très-petite; car ω croiſſant de ρ & très-peu, k croîtra d'une quantité

tité ρ' qui ſera telle qu'on aura $\frac{2\varrho}{3} = \rho'\left[\frac{k^2+3}{(kk+1)k^3} + ATk\left(-\frac{1}{k^2}-\frac{9}{k^4}\right)+\frac{6}{k^3}\right] = \frac{\varrho'}{(kk+1)k^4} \times [7k^3+9k-ATk(1+kk)(9+k^2)]$. Ce qui donnera la valeur de ρ' répondante à chacune des deux valeurs de k.

28. De-là il s'enſuit que lorſqu'un fluide homogene & tournant ſur lui-même eſt en équilibre, ſi on n'altere que très-peu la force centrifuge, la figure du ſolide en ſera peu altérée, à moins que la force centrifuge ne ſoit très-petite, & l'applatiſſement fort grand, auquel cas une petite altération dans la force centrifuge altérera conſidérablement la figure du ſphéroïde.

29. Dans l'équation $\alpha = \frac{\frac{9r}{2p}+\frac{3\alpha'}{5}\left(\frac{\Delta-\delta}{\Delta}\right)}{1-\frac{3\delta}{5\Delta}}$ qu'on a donnée ci-deſſus (XLV Mém. §. III, p. 68), il eſt aiſé de voir que ſi $\alpha' = \frac{5qr}{4p}$, c'eſt-à-dire, ſi le noyau a la figure néceſſaire pour l'équilibre d'un ſolide homogene, on aura auſſi $\alpha = \frac{5qr}{4p}$, quel que ſoit le rapport de δ à Δ; d'où il s'enſuit, comme nous l'avons déja remarqué plus haut pag. 79, que ſi un noyau ſolide & homogene, déja en équilibre par lui-même, eſt recouvert d'une lame de fluide infiniment mince, de denſité quelconque, cette lame de fluide ſera en équilibre, pourvû que ſa figure ſoit ſemblable à la ſurface du

noyau. Et en effet il eſt aiſé de voir *à priori*, que dans cette hypothèſe de la ſimilitude des deux figures, l'attraction verticale ſera ſenſiblement la même à la ſurface du fluide qu'à la ſurface du noyau, puiſque l'épaiſſeur de la lame de fluide (quelle que ſoit d'ailleurs ſa denſité) eſt ſuppoſée infiniment mince; de plus il eſt aiſé de voir encore que l'attraction horizontale (c'eſt-à-dire, perpendiculaire au rayon) produite par le fluide, eſt nulle ou comme nulle, à cauſe du peu d'épaiſſeur du fluide, & de la ſimilitude des deux ſurfaces. Donc l'attraction horizontale à la ſurface du fluide ſera ſenſiblement la même que l'attraction horizontale à la ſurface du noyau. Donc les attractions étant les mêmes de part & d'autre, & le noyau étant déja par lui-même en équilibre, il s'enſuit que le fluide y ſera auſſi. Ce raiſonnement, au reſte, prouve bien la poſſibilité de l'équilibre dans le cas de $\alpha = \alpha'$, & de $\alpha' = \frac{5\varphi r}{4p}$; mais il ne prouve pas qu'il n'y en a point d'autre poſſible; au lieu que le calcul précédent fait voir que ſi $\alpha' = \frac{5\varphi r}{4p}$, il n'y a d'équilibre poſſible que dans le cas de $\alpha = \frac{5\varphi r}{4p} = \alpha'$.

30. Il en faut cependant excepter le cas de $5\Delta = 3\delta$, qui donne $\alpha = \frac{0}{0}$, c'eſt-à-dire, égal à tout ce qu'on voudra, mais toujours très-petit. D'où il s'enſuit que ſi $\alpha' = \frac{5\varphi r}{4p}$, & que $3\delta = 5\Delta$, la lame de fluide

qui recouvre le noyau pourra avoir telle figure qu'on voudra. C'eſt ce que nous avons déja remarqué page 190 du Tome III de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde* (*h*). Voyez auſſi l'*art.* 16 ci-deſſus & les ſuivans.

31. Nous avons auſſi remarqué dans le troiſiéme Volume de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, pag. 187, que la propoſition énoncée par M. Clairaut, pag. 249 de ſa *Théorie de la Figure de la Terre*, quoique vraie, n'eſt cependant pas rigoureuſement démontrée. Il ſera facile de s'en aſſurer au moyen de ce qui a été dit ci-deſſus (*§.* III du XLV Mém. p. 75), que l'équation $10A\delta - 2D = 5A\phi$, donnée par M. Clairaut pour la figure d'un ſphéroïde fluide infiniment mince qui recouvre un noyau ſolide, n'eſt pas exacte. Or M. Clairaut emploie cette formule pour la démonſtration de la propoſition énoncée à la page 249 de ſon Ouvrage. Ainſi cette démonſtration eſt inſuffiſante.

32. Je remarquerai encore à cette occaſion que les formules de la page 247 du même Ouvrage, & ſur leſquelles eſt fondé le théorême de la page 249, ou du moins la démonſtration de ce théorême, ne ſont pas non plus aſſez exactes, ou du moins aſſez générales. Car en conſervant les dénominations de M. Clairaut, dont je ſuppoſe qu'on ait ici l'Ouvrage ſous les yeux, il faut, pour rendre complette la formule de la p. 247, ajouter à $2cA$, $\frac{2c}{3}(1 - a^3)$, a étant le demi-axe

(*h*) Voyez les Remarques à la fin de ce Mémoire.

du noyau ; comme M. Clairaut l'a fait lui-même à la page 215 du même Ouvrage ; il faut de plus & par la même raiſon, ajouter à D, $\delta - \alpha^5 \alpha$, comme M. Clairaut l'a fait encore à la même page 215, & pour lors la formule $4cA\delta + 2cA\varphi - \frac{6cD}{5}$ de la pag. 249 deviendra $4cA\delta + \frac{4c\delta - 4ca^3\delta}{3} + 2cA\varphi + \frac{2c\varphi}{3} - \frac{2ca^3\varphi}{3} - \frac{6c}{5}(D + \delta - a^5\alpha)$; il faudra enſuite, en ſuivant toujours le procédé de M. Clairaut, diviſer cette quantité, non par $2cA$ ſimplement, mais par $2cA + \frac{2c\delta}{3} - \frac{2ca^3\delta}{3}$, que je ſuppoſe pour abréger $= 2cM$, ce qui donnera pour quotient $2\delta + \varphi - \frac{3D}{5M} - \frac{3}{5}\left(\frac{\delta - \alpha a^5}{M}\right)$, rapport entre la différence de peſanteur au pole & à l'équateur, & la peſanteur à l'équateur, ou ce qui revient ici à peu près au même, la peſanteur au pole. Or (page 217 de M. Clairaut) on a $2cM : \frac{4c}{5}\left(\frac{D + \delta - \alpha a^5}{M}\right) + 2cM\varphi :: 1 : 2\delta$; d'où l'on tire $\frac{3}{5}\left(\frac{D + \delta - \alpha a^5}{M}\right) = 3\delta - \frac{3\varphi}{2}$; donc $\frac{5\varphi}{x} - \delta = \varphi + 2\delta - \frac{3}{5}\left(\frac{D + \delta - \alpha a^5}{M}\right)$, c'eſt-à-dire, égal au rapport qu'on vient de trouver entre la différence de peſanteur au pole & à l'équateur, & la peſanteur à l'équateur.

33. Ainſi la propoſition énoncée par M. Clairaut

(p. 249) eſt généralement vraie, quoique la démonſtration qu'il en donne ne ſoit pas ſuffiſante : & ce qui empêche qu'elle ne le ſoit, c'eſt que M. Clairaut y ſuppoſe tacitement que la différence d'ellipticité eſt ſenſiblement la même dans deux couches très-proches l'une de l'autre ; ce qui n'eſt pas vrai en général, & dans le cas, par exemple, où un noyau ſolide de figure donnée eſt couvert d'un fluide homogene, & d'une denſité quelconque différente de celle du noyau.

34. En général, & quelle que ſoit la loi des denſités, des ellipticités & des épaiſſeurs des couches dans le noyau & dans le fluide, ſi on appelle $2cA'$ l'attraction du ſphéroïde régardé comme ſphérique, & $\frac{+cD'}{5}$ le coefficient conſtant de l'attraction horizontale, proportionnelle d'ailleurs à ſin. z cof. z (z étant la diſtance au pole) on aura, au lieu de $4cA\delta + 2cA\varphi - \frac{6cD}{5}$, $4cA'\delta + 2cA'\varphi - \frac{6cD'}{5}$, qui diviſée par $2cA'$, valeur très-approchée de l'attraction au pole ou à l'équateur, donnera $2\delta + \varphi - \frac{3D'}{5A'}$; on aura de plus en général $2cA' : \frac{4cD'}{5} + 2cA'\varphi :: 1 : 2\delta$, d'où $\frac{3D'}{5A'} = 3\delta - \frac{3\varphi}{2}$, & en général $\frac{5\varphi}{2} - \delta = \varphi + 2\delta - \frac{3D'}{5A'}$.

35. Il paroît par ce théorême (comme l'a déja re-

marqué M. Clairaut, quoiqu'en s'appuyant ſur des formules inſuffiſantes) qu'en général ſi δ eſt $> \frac{1}{230}$, la diminution de peſanteur du pole à l'équateur ſera $< \frac{1}{230}$ & réciproquement, ce qui ſemble contraire aux obſervations. Voyez la *Figure de la Terre* de M. Clairaut, pag. 299. Ce grand Géometre cherche à réſoudre cette difficulté, en ſuppoſant quelques erreurs légeres dans la meſure du degré du Nord. Mais la ſolution qu'il propoſe, ne paroît plus pouvoir être admiſe depuis que les meſures du Pérou ont donné $\delta > \frac{1}{230}$. Comme ces dernieres meſures, comparées aux autres, ſemblent ne pas donner un ſphéroïde elliptique, il ſeroit peut-être bon de chercher, par les méthodes que j'ai indiquées dans le Tome III de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, la diminution de la peſanteur dans un ſphéroïde non elliptique, & l'ellipticité d'un pareil ſphéroïde, dans différentes hypothèſes, & de voir ſi on trouveroit à-la-fois cet excès $> \frac{1}{230}$, & $\delta > \frac{1}{230}$, comme les obſervations ſemblent le donner.

36. Je remarquerai encore à cette occaſion, 1°. qu'à la pag. 181 du Tome III de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, il faut au lieu de $B = \frac{3 \cdot 16 D}{25}$, lire $B = -\frac{3D}{5}$; légere mépriſe de calcul que le Lecteur peut corriger aiſément. 2°. Que par conſéquent on aura, dans l'endroit cité, $\alpha A - \frac{3 \alpha D}{5} +$

$a D + \frac{5N}{4} = 0$, de ſorte qu'en faiſant, par exemple, $A = 0$, pour ſimplifier le réſultat, on aura $\frac{2aD}{5} = -\frac{5N}{4}$ & $D = -\frac{25N}{8}$.

37. J'ai démontré Tome V de mes *Opuſcules*, pag. 25 *& ſuiv.* qu'un ſphéroïde homogene dont le rayon ſeroit $A + B$ cof. $z + C$ cof. $z^2 + D$ cof. z^3, &c. ne ſauroit être en équilibre, à moins que le coefficient D & les ſuivans ne ſoient $= 0$. Cette démonſtration ſuppoſe que ce coefficient D & les ſuivans ne ſoient pas très-petits par rapport à C, mais y ſoient comparables. En effet on ſait qu'un ſphéroïde elliptique homogene eſt rigoureuſement en équilibre ; or un tel ſphéroïde auroit pour rayon une quantité de la forme $A + B$ cof. $z + C$ cof. $z^2 + D$ cof. $z^3 + E$ cof. z^4, &c. dans laquelle les coefficiens qui ſuivent C ne ſeroient pas tous $= 0$ à la rigueur, mais ſeroient très-petits par rapport à C, en ſuppoſant que C lui-même eſt très-petit ainſi que B.

38. Je dois obſerver auſſi que la démonſtration n'auroit pas lieu pour le cas où le rayon ſeroit exprimé par des quantités radicales. Il eſt vrai qu'en faiſant diſparoître ces quantités par les méthodes connues des ſeries, on auroit une expreſſion du rayon qui ne contiendroit plus de radicaux, & à laquelle la démonſtration ſembleroit pouvoir s'appliquer ; mais peut-être tous les Géometres ne ſeroient-ils pas ſatisfaits de cette maniere

de démontrer, la transformation d'un radical en ſerie, pouvant donner une expreſſion très-fautive de ce même radical. Ce qui m'a engagé à ſupprimer les radicaux de l'expreſſion du rayon, c'eſt afin que cette expreſſion demeure la même en faiſant z poſitif ou négatif, & qu'ainſi les deux moitiés du Méridien ſoient aſſujetties à la même équation. Si on ne jugeoit pas cette condition néceſſaire, la démonſtration que j'ai donnée n'auroit pas lieu pour le cas où la condition dont il s'agit ne ſeroit pas obſervée.

39. Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans l'*art.* 100 du XLVI Mém. p. 177, ſi on prolonge CA en A' (Fig. 35), & que du point A' on tire une corde AaL, on aura, en appellant $A'C$, δ, LA', x, & l'angle $LA'M$, z', l'équation $\frac{xx \text{ ſin. } z'^2 . cc}{bb} = cc - (\delta - x \text{ coſ. } z')^2$; d'où l'on tire $x = \frac{bb\delta \text{ coſ. } z'}{(cc-bb) \text{ ſin. } z'^2 + bb} \pm \frac{b^2 c}{(cc-bb) \text{ ſin. } z'^2 + bb} \sqrt{[1 + \text{ ſin. } z'^2 \left(\frac{cc-bb-\delta\delta}{bb}\right)]}$; & comme les deux valeurs de x ſont repréſentées par $A'a$ & $A'L$, il s'enſuit que ſi G eſt le point de milieu de aL, on aura $A'G = \frac{bb\delta \text{ coſ. } z'}{(cc-bb) \text{ ſin. } z'^2 + b^2} = \frac{\delta \text{ coſ. } z'}{\frac{cc-bb}{bb} \text{ ſin. } z'^2 + 1}$, & aL ou $2Ga = \frac{2c\sqrt{[1 + \text{ ſin. } z'^2 \left(\frac{cc-bb-\delta\delta}{bb}\right)]}}{\frac{cc-bb}{bb} \text{ ſin. } z'^2 + 1}$.

40. Si on fait tourner la demi-ellipſe ALO autour de

de AO, enſorte que l'angle qu'elle décrit ſoit dZ, il n'eſt pas difficile de voir que l'élément de l'attraction de ce ſolide ſur le point A' ſera $= aL \times dZ \times d\zeta' \times \text{ſin. } \zeta' \text{ cof. } \zeta'$, dont l'intégrale eſt $dZ \int d\zeta' \text{ ſin. } \zeta' \text{ cof. } \zeta' . aL$. Soit $\frac{cc - bb}{bb} = \omega^2$, $\frac{\delta\delta}{bb} = \gamma^2$, on aura $aL = \frac{2c\sqrt{[1 + \text{ſin. } \zeta'^2 (\omega^2 - \gamma^2)]}}{\omega^2 \text{ ſin. } \zeta'^2 + 1}$.

41. Soit maintenant $\omega^2 \text{ ſin. } \zeta'^2 = \omega'^2 \text{ ſin. } \zeta^2$, on aura $d\zeta' \text{ ſin. } \zeta' \text{ cof. } \zeta' = \frac{\omega\omega \text{ ſin. } \zeta d(\text{ſin. } \zeta')}{\omega\omega} = \frac{\omega'\omega' \text{ ſin. } \zeta d \text{ ſin. } \zeta}{\omega\omega}$, & $aL = \frac{2c\sqrt{[1 + \text{ſin. } \zeta^2 (\omega'^2 - \frac{\omega'^2\gamma^2}{\omega^2})]}}{\omega'^2 \text{ ſin. } \zeta^2 + 1}$, quantité qui devient $= \frac{2c \text{ cof. } \zeta}{\omega'^2 \text{ ſin. } \zeta^2 + 1}$, en ſuppoſant $\omega'^2 (1 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}) = -1$; au moyen de cette transformation, la différentielle $aL . d\zeta' \text{ ſin. } \zeta' \text{ cof. } \zeta'$ ſera de cette forme $\frac{A d\zeta \text{ ſin. } \zeta \text{ cof. } \zeta^2}{\omega'^2 \text{ ſin. } \zeta^2 + 1}$, dont l'intégration n'a aucune difficulté.

42. La méthode de M. Maclaurin (*Traité des Fluxions*, art 649) pour réduire l'attraction du ſphéroïde ſur le point A' placé hors de lui (dans le prolongement de ſon axe, & à la diſtance $AC = \delta$ du centre) à l'attraction d'un autre ſphéroïde ſur le même point A' placé à l'extrémité de ſon axe, ſuppoſé égal à 2δ, peut ſe déduire aiſément de la propoſition précédente; il ſuffit pour cela de remarquer que l'attraction du dernier de ces ſphéroïdes, à l'extrémité de ſon axe, dé-

pendroit de l'intégration d'une quantité de cette forme $\frac{d\zeta \text{ fin. } \zeta \text{ cof. } \zeta^2}{\frac{CC-BB}{BB} \text{ fin. } \zeta^2 + 1}$; d'où il eſt aiſé de conclure qu'il ſuffira de faire avec M. Maclaurin 1°. $CC - BB = cc - bb$, c'eſt-à-dire, les excentricités égales dans les deux ſphéroïdes ; 2°. $\frac{\text{fin. } \zeta^2}{B^2} = \frac{\text{fin. } \zeta'^2}{b^2}$, ce qui donnera $\omega'^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right) = \left(\text{en prenant } \omega'^2 = \frac{CC-BB}{BB}\right)$; $\left(\frac{CC-BB}{BB}\right)\left(1 - \frac{\delta\delta}{bb} \times \frac{bb}{cc-bb}\right) = -1$, à cauſe de $\delta = C$, comme le ſuppoſe M. Maclaurin.

43. Il n'eſt pas même néceſſaire, ce qui rendra le théorême de M. Maclaurin plus général, de ſuppoſer $CC - BB = cc - bb$, ni $C = \delta$, il ſuffit de ſuppoſer $\frac{CC-BB}{BB} \text{ fin. } \zeta^2 = \frac{cc-bb}{bb} \text{ fin. } \zeta'^2$, & de comparer l'attraction dont il s'agit à celle d'un ſphéroïde elliptique, dans lequel le corps attiré eſt placé au pole, & dont l'axe $2C$, ou plutôt le rapport $\frac{C}{B}$ des deux axes, eſt tel que $\left(\frac{CC-BB}{BB}\right)\left(1 - \frac{\delta\delta}{cc-bb}\right) = -1$; d'où l'on tire $\frac{CC}{BB}\left(1 - \frac{\delta\delta}{cc-bb}\right) + \frac{\delta\delta}{cc-bb} = 0$, ce qui donne $\frac{CC}{BB} = \frac{\delta\delta}{\delta\delta - cc + bb}$; formule qui, en faiſant $\delta = C$, donne $BB = CC - cc + bb$, & $CC - BB = cc - bb$.

44. Au reſte la transformation dont nous nous ſommes ſervis pour trouver l'attraction d'un ſphéroïde elliptique ſur un corps placé dans ſon axe prolongé, n'eſt néceſſaire que pour démontrer & généraliſer le théorême cité de M. Maclaurin; car il eſt d'ailleurs évident qu'une quantité de la forme dont il s'agit ici, ſavoir $\frac{A\,d\zeta\ \text{ſin.}\ \zeta\ \text{cof.}\ \zeta\ \sqrt{(B\ \text{ſin.}\ \zeta^2 + C)}}{G\ \text{ſin.}\ \zeta^2 + D}$ eſt intégrable par logarithmes réels ou imaginaires, en ſuppoſant ſin. $\zeta = x$ (ce qui donne $d\zeta$ cof. $\zeta = dx$) & en faiſant enſuite diſparoître par les méthodes connues le radical $\sqrt{(Bx^2 + D)}$.

45. Si le ſolide elliptique attirant n'eſt pas un ſphéroïde de révolution, tout le reſte demeurant d'ailleurs le même, alors b n'eſt plus conſtant, mais variable, & il n'eſt pas difficile de voir qu'au lieu de b^2, il faut mettre $\frac{b^2}{1 + \text{ſin.}\ Z^2\left(\frac{bb}{aa} - 1\right)}$, en nommant (Fig. 23 & art. 102 du XLVII Mém. p. 177) CK, b, CR, a, & Z l'angle décrit par l'ellipſe ALO autour de AO; donc en écrivant $b'b'$ au lieu de cette derniere quantité, on ſuppoſera $CC - B'B' = cc - b'b'$; $\frac{\text{ſin.}\ \zeta^2}{B'B'} = \frac{\text{ſin.}\ \zeta'^2}{b'b'}$, & d'après cette ſuppoſition & celle de $C = c$, il eſt aiſé de voir que les deux attractions élémentaires ſeront comme $c\,dZ \times d\zeta'$ ſin. ζ' cof. ζ' à $C\,dZ' \times d\zeta$ ſin. $\zeta \times$ cof. ζ, c'eſt-à-dire, comme dZ ſin. ζ'^2 à dZ' ſin. ζ^2, ou comme $cb'b'dZ$ à $CB'B'dZ'$. Or $CC - B'B' =$

$cc - b'b'$, donne $CC - \frac{BB}{1 + \text{fin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)} = cc - \frac{bb}{1 + \text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)}$. Cela posé,

46. Soit $cc - bb = 0 = CC - BB$, on aura $\frac{cc\,\text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{bb - aa}{aa}\right)}{1 + \text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)} = \frac{CC\,\text{fin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)}{1 + \text{fin.}\, Z'^2 \left(\frac{B - A}{A^2}\right)}$; d'où il est aisé de conclure que $\frac{\text{fin.}\, Z}{\sqrt{\left[1 + \text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}}$ est à $\frac{\text{fin.}\, Z'}{\sqrt{\left[1 + \text{fin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}}$ en raison donnée.

47. Soit de plus $\frac{(BB - AA).CC}{BB} = \frac{(bb - aa).cc}{bb}$, ou (à cause de $CC = BB$ & $cc = bb$) $BB - AA = bb - aa$, on aura $\frac{b^2\,\text{fin.}\, Z^2}{a^2\left[1 + \text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]} = \frac{B^2\,\text{fin.}\, Z'^2}{A^2\left[1 + \text{fin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)\right]}$; d'où l'on tire, en retranchant l'unité de part & d'autre, $\frac{\text{cof.}\, Z^2}{1 + \text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)} = \frac{\text{cof.}\, Z'^2}{1 + \text{fin.}\, Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)}$; & par conséquent cof. Z est à $\sqrt{\left[1 + \text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right]}$ en raison donnée; donc en prenant les différences, $\frac{dZ\,\text{fin.}\, Z}{\left(1 + \text{fin.}\, Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}$ est à

$\frac{dZ' \text{ sin. } Z'}{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$ en raiſon donnée, c'eſt-à-dire, (à cauſe que $\frac{\text{sin. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}}$ eſt à $\frac{\text{sin. } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}}$ en raiſon donnée) que $\frac{dZ}{1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}$ eſt à $\frac{dZ'}{1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)}$ en raiſon donnée, & par conſéquent $b'b'dZ$ eſt à $B'B'dZ'$ en raiſon donnée, puiſque $B'B'$ eſt à $b'b'$ comme $\frac{1}{1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)}$ eſt à $\frac{1}{1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)}$. Donc les attractions élémentaires ſont en raiſon donnée, donc les attractions totales ſont auſſi en raiſon donnée.

48. Si on veut avoir cette raiſon donnée qui exprime celle des deux attractions, il eſt clair que l'équation $\frac{B \text{ sin. } Z'}{A\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}} = \frac{b \text{ sin. } Z}{a\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}}$, donne $\frac{\text{sin. } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}} : \frac{\text{sin. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}} :: \frac{A}{B} : \frac{a}{b}$; que de même à cauſe de $\frac{\text{cos. } Z}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}} = \frac{\text{cos. } Z'}{\sqrt{\left[1+\text{sin. } Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}}$, on aura en prenant les différences, $-\frac{bb\,dZ \text{ sin. } Z}{aa\left[1+\text{sin. } Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$ égal à

$-\frac{BBdZ'\,\text{sin. }Z'}{AA\left[1+\text{sin. }Z'^2\left(\frac{B-A}{A}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$ ou (en mettant pour $\frac{\text{sin. }Z}{\sqrt{\left[1+\text{sin. }Z^2\left(\frac{a^2-a^2}{a^2}\right)\right]}}$ & $\frac{\text{sin. }Z'}{\sqrt{\left[1+\text{sin. }Z'^2\left(\frac{B-A}{A^2}\right)\right]}}$ leurs proportionnelles $\frac{a}{b}, \frac{A}{B}$,) $-\frac{bdZ}{a\left[1+\text{sin. }Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)\right]}$ $=-\frac{BdZ'}{A\left[1+\text{sin. }Z'^2\left(\frac{B^2-A^2}{A^2}\right)\right]}$, c'eſt-à-dire, à cauſe des valeurs de $b'b'$ & de $B'B'$ déja trouvées, $\frac{bb'b'dZ}{bba} = \frac{BB'B'dZ'}{BBA}$; donc, à cauſe de $c=b$ & $C=B$, on aura $cb'b'dZ$ eſt à $CB'B'aZ'$:: abb eſt à $AB'B'$, c'eſt-à-dire, comme les ſolidités des deux ſphéroïdes.

49. De-là il s'enſuit que ſi le ſolide eſt un ſphéroïde de révolution autour de l'axe $2CR=2a$ (Fig. 23 & p. 177 ci-deſſus), enſorte que $c=b$, ou $CK=CA$, & que $ALOK$ ſoit le plan de l'équateur, on trouvera l'attraction exercée ſur le point A, placé à telle diſtance qu'on voudra.

50. Mais ſi b n'eſt pas $=c$, (b & a étant ſuppoſés différens) alors les équations entre ſin. Z & ſin. Z' ſeront beaucoup plus compliquées, & il ne paroît pas facile d'en tirer des concluſions analogues aux précédentes. En effet, ſuppoſant $CC-B'B'=cc-b'b'$, on a pour lors $[cc-bb+cc\,\text{ſin. }Z^2\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)]$:

$[1 + \text{sin. } Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)] = [CC - BB + CC \times \text{sin. } Z'^2 \times \left(\frac{B^2 - A^2}{A^2}\right)] : [1 + \text{sin. } Z^2 \times \frac{B^2 - A^2}{A^2}]$, & quand on feroit $CC - BB = cc - bb$, il n'eſt pas facile de tirer de-là une équation commode entre sin. Z & sin. Z'.

51. On trouveroit une difficulté ſemblable, & même encore plus grande, ſi au lieu de faire $CC - B'B' = cc - b'b'$, on faiſoit ſimplement (*art.* 43) $\frac{CC - B'B'}{B'B'} \times \left(1 - \frac{\delta\delta}{cc - b'b'}\right) = -1$, ou $\frac{CC}{B'B'} = \frac{\delta\delta}{\delta\delta - cc + b'b'}$, ce qui donneroit $\frac{CC}{BB}[1 + \text{sin. } Z'^2 \left(\frac{B^2 - A^2}{B^2}\right)] = \delta\delta[1 + \text{sin. } Z^2 \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)] : [(\delta\delta - cc)[1 + \text{sin. } Z^2 \times \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2}\right)] + bb]$; équation d'où il eſt encore plus difficile de tirer une relation entre sin. Z & sin. Z', telle que les deux attractions ſoient en raiſon donnée. Au reſte, cette ſuppoſition de $\frac{CC}{B'B'} = \frac{\delta\delta}{\delta\delta - cc + b'b'}$, en faiſant avec M. Maclaurin $C = \delta$, ſe réduiroit à celle de l'*art.* 45; c'eſt-à-dire, à $CC - B'B' = cc - b'b'$.

52. En général, ſans s'aſtreindre à la ſuppoſition de $CC - B'B' = cc - b'b'$, & ſe bornant à celle de $\frac{CC - B'B'}{B'B'}$ sin. $\zeta^2 = \frac{cc - b'b'}{b'b'}$ sin. ζ'^2, & de $\frac{CC}{B'B'}$

$= \frac{\delta\delta}{\delta\delta - cc + b'b'}$, il eſt aiſé de voir que les élémens des deux attractions ſeront entr'eux comme $cdZ \times$ ſin. ζ'^2 à $CdZ' \times$ ſin. ζ'^2, ou comme $\frac{cdZ \times b'b'}{cc - b'b'}$ à $\frac{CdZ' \times B'B'}{CC - B'B'}$, ou enfin comme $\frac{cdZ.bb}{cc - bb + cc \text{ ſin. } Z^2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}$ à $\frac{CdZ'.BB}{CC - BB + CC \text{ ſin. } Z'^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)}$; ſuppoſons maintenant $CC - B'B' = cc - b'b'$, on aura, en faiſant $cc - bb = \delta'\delta'$, $CC - BB = \Delta'\Delta'$, $b^2 - a^2 = \Omega^2$, $B^2 - A^2 = \Omega'^2$, l'équation $\frac{\delta'\delta' + \frac{\Omega\Omega cc \text{ ſin. } Z^2}{a^2}}{1 + \frac{\Omega^2 \text{ ſin. } Z^2}{a^2}} = \frac{\Delta'\Delta' + \frac{\Omega'\Omega'.CC \text{ ſin. } Z'^2}{A^2}}{1 + \frac{\Omega'^2 \text{ ſin. } Z'^2}{a^2}}$; d'où l'on tire en différentiant,

$$\frac{dZ \text{ ſin. } Z \text{ coſ. } Z}{\left(1 + \frac{\Omega^2 \text{ ſin. } Z^2}{a^2}\right)^2} \times \left(\frac{cc\Omega\Omega}{a^2} - \frac{\delta'\delta'\Omega\Omega}{a^2}\right) = \frac{dZ' \text{ ſin. } Z' \text{ coſ. } Z'}{\left(1 + \frac{\Omega'^2 \text{ ſin. } Z'^2}{A^2}\right)^2} \times (cc - \Delta'\Delta')\frac{\Omega'^2}{A^2}$$

; donc les deux attractions élémentaires ſeront entr'elles comme $cbb \times (1 + \frac{\Omega^2}{a^2} \text{ ſin. } Z^2)^2$ diviſé par $\left(\frac{cc\Omega\Omega}{aa} - \frac{\delta'\delta'\Omega\Omega}{aa}\right) \times$ ſin. Z coſ. $Z \times (\delta'\delta' + \frac{cc\Omega\Omega}{aa} \text{ ſin. } Z^2)$, à $CBB \times (1 + \frac{\Omega'^2}{A^2} \text{ ſin. } Z'^2)^2$ diviſé par $\left(\frac{CC\Omega'\Omega'}{AA} - \frac{\Delta'\Delta'\Omega'\Omega'}{AA}\right)$ ſin.

$\text{sin. } Z' \text{ cos. } Z' \times \left(\Delta'\Delta' + \frac{cc\Omega'\Omega' \text{ sin. } Z'^2}{A^2}\right)$, ou (à cause de $cc - b'b' = CC - B'B'$, ce qui donne $\frac{1 + \frac{\Omega^2 \text{ sin. } Z^2}{a^2}}{\mathcal{N}'\mathcal{N}' + \frac{cc\Omega\Omega \text{ sin. } Z^2}{aa}} = \frac{1 + \frac{\Omega'^2 \text{ sin. } Z'^2}{A^2}}{\Delta'^2 + \frac{CC\Omega'\Omega' \text{ sin. } Z'^2}{A^2}}$,) comme $\frac{\lambda\left(1 + \frac{\Omega^2 \text{ sin. } Z^2}{a^2}\right)}{\text{sin. } Z \text{ cos. } Z}$ à $\frac{\Lambda\left(1 + \frac{\Omega'^2 \text{ sin. } Z'^2}{A^2}\right)}{\text{sin. } Z' \text{ cos. } Z'}$; λ & Λ désignant des quantités constantes. Or si on se contente de faire $\mathcal{N}'^2 = \Delta'^2$, & $\Omega^2 = \Omega'^2$ (sans supposer $cc = bb$ & $CC = BB$, c'est-à-dire, $\mathcal{N}' = 0$ & $\Delta' = 0$), il ne paroît pas que cette derniere proportion, supposée constante, puisse avoir lieu en même-temps que $CC - B'B' = cc - b'b'$, c'est-à-dire, que $\frac{\text{sin. } Z \text{ cos. } Z}{1 + \frac{\Omega^2 \text{ sin. } Z^2}{a^2}}$ puisse être à $\frac{\text{sin. } Z' \text{ cos. } Z'}{1 + \frac{\Omega'^2 \text{ sin. } Z'^2}{A}}$ en raison constante.

53. On peut considérer encore, que si on nomme ζ la tangente de l'angle Z, ce qui donne $dZ = \frac{d\zeta}{1 + \zeta\zeta}$, & $\text{sin. } Z^2 = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta\zeta}$, le rapport des élémens des deux attractions dépendra de celui de $\frac{d\zeta}{cc - bb + bb\zeta\zeta\left(\frac{cc}{aa} - 1\right)}$ à $\frac{d\zeta'}{CC - BB + BB\zeta'\zeta'\left(\frac{CC}{A^2} - 1\right)}$; d'où il s'ensuit que pour que ce rapport soit constant, il faut que les angles

$\frac{d\zeta}{1+\frac{bb}{cc-bb}\left(\frac{cc}{aa}-1\right)}$ & $\frac{b\zeta'}{1+\frac{BB\zeta'\zeta'}{CC-BB}\left(\frac{CC}{A^2}-1\right)}$ ſoient en rapport conſtant. D'où l'on tire ou $\frac{d\zeta}{\sqrt{(cc-bb)}} \times \sqrt{\frac{cc}{a^2}-1} = \frac{B\zeta'}{\sqrt{(CC-BB)}} \times \sqrt{\frac{C^2}{A^2}-1}$, (ce qui eſt le cas le plus ſimple) ou en faiſant $\frac{BB}{CC-BB} \times \left(\frac{CC}{A^2}-1\right) = \Gamma^2$, & $\frac{bb}{cc-bb} \times \left(\frac{c^2}{a^2}-1\right) = \gamma^2$, l'équation plus compliquée $\frac{\mu d\zeta'}{1+\Gamma\Gamma\zeta'\zeta'} = \frac{d\zeta}{1+\gamma\gamma\zeta\zeta}$, μ étant une conſtante; ce qui donnera, par les régles connues, une équation entre ζ & ζ', ou $\frac{\text{ſin. } Z}{\sqrt{(1+ZZ)}}$ & $\frac{\text{ſin. } Z'}{\sqrt{(1+Z'Z')}}$. Or ces différentes équations ne ſeront pas la même que celle qui eſt déduite de la ſuppoſition de $CC - B'B' = cc - b'b'$, & encore moins que celle qui eſt déduite de la ſuppoſition de $\frac{CC}{B'B'} = \frac{\delta\delta}{\delta\delta - cc + b'b'}$; d'autant plus que la quantité δ (ſuppoſée ici différente de C) ne ſe trouveroit pas dans l'équation entre ζ & ζ'.

54. Je ſoupçonne donc que M. Maclaurin s'eſt trompé dans l'*art.* 653 de ſon *Traité des Fluxions*, quand il a dit que ſa méthode pour trouver l'attraction d'un ſphéroïde de révolution dans le plan de l'équateur, ou dans l'axe, pouvoit s'appliquer à un ſolide qui ne ſe-

roit pas de révolution ; car en faiſant comme il le preſcrit $cc - bb = CC - BB$, & $BB - AA = bb - aa$, on ne parviendra point, ce me ſemble, à la concluſion qu'il en tire, que $B'B'dZ'$ & $b'b'dZ$ ſont en raiſon conſtante. Au reſte, ce n'eſt ici qu'un doute que je propoſe, n'ayant pas ſuffiſamment examiné la propoſition de M. Maclaurin, qu'il ſe contente d'énoncer ſans la démontrer.

55. Soit d (Fig. 36) un point hors d'un ſolide elliptique de révolution, dont je ſuppoſe que l'axe eſt AK, aVQ une ellipſe formée dans ce ſolide par un plan paſſant par la ligne DdQ, H le point de milieu de aQ, $AG = c$, le demi-axe aH de l'ellipſe $aVQ = c'$, $Hd = \delta'$, duV une corde quelconque de cette ellipſe aVQ, g le point de milieu de uV, on aura, en appellant b' le demi-axe conjugué de l'ellipſe aVQ, & ζ' l'angle VdQ, $gV = \frac{d\sqrt{\left[1 + \text{ſin. } \zeta'^2 \left(\frac{c'c' - \delta'\delta' - b'b'}{b'b'}\right)\right]}}{\frac{c'c' - b'b'}{b'b'} \text{ ſin. } \zeta'^2 + 1}$, & $dg = \frac{\delta' \text{ cof. } \zeta'}{\frac{c'c' - b'b'}{b'b'} \text{ ſin. } \zeta'^2 + 1}$. Maintenant ſoit l'angle $GDQ = Z$, il n'eſt pas difficile de voir, 1°. que $b'b' : c'c' :: GP^2$ que j'appelle bb eſt à $\frac{cc}{\frac{cc - bb}{bb} \text{ ſin. } Z^2 + 1}$, AG étant $= c$, & GP le rayon de l'équateur. 2°. Que ſi on nomme la donnée Gd, $\mathfrak{C}$, & l'angle donné DGd, $\mathfrak{s}$, on aura $Dd = \frac{\mathfrak{C} \text{ ſin. } \mathfrak{s}}{\text{ſin. } Z}$; & comme DH & Da

peuvent être exprimés aiſément en Z par l'*art.* 39, il eſt clair que $Hd = \delta'$ & $aH = c'$, le ſeront auſſi en Z & en conſtantes. De plus, on verra encore aiſément en faiſant tourner le plan dVQ autour d'un axe paſſant par le point d, & perpendiculaire au plan APK, que l'élément de l'attraction ſuivant dQ (l'angle GDQ étant toujours Z) eſt dZ cof. $z'^2 \times dz' \times uV$; c'eſt-à-dire, $\frac{2\,dZ \text{ cof. } z'^2 \times c'V\left[1 + \text{ſin. } z'^2\left(\frac{c'c' - a'a' - b'b'}{b'b'}\right)\right]}{\frac{c'c' - b'b'}{b'b'} \text{ ſin. } z'^2 + 1} \times dz'$.

Or comme on a ici au numérateur cof. z'^2 au lieu de cof. z' ſin. z', on ne peut employer ici les méthodes ci-deſſus (*art.* 40 *& ſuiv.*) pour ſimplifier cette expreſſion & pour la réduire à l'attraction d'un point placé ſur la ſurface du ſphéroïde.

56. On éprouveroit à peu près la même difficulté quand même on ſuppoſeroit que le point d tombât en D; enſorte que la méthode employée par M. Maclaurin, & depuis par d'autres Géometres, pour trouver l'attraction d'un ſphéroïde elliptique ſur un point placé à l'équateur, ne s'appliqueroit pas ſi aiſément à l'attraction d'un point placé dans le plan de ce même équateur. Mais nous avons donné ci-deſſus un autre moyen d'en venir à bout, par la conſidération des tranches elliptiques qui paſſent par l'axe AK; & c'eſt auſſi ce que M. Maclaurin a remarqué & prouvé à ſa maniere.

57. Nous ajouterons qu'il ne ſeroit pas même fort facile, le point d tombant en D, de trouver par le

moyen des coupes aVQ, l'attraction d'un ſolide ſphérique ſur le point D, attraction qui, comme l'on ſait, eſt ſi aiſée à trouver par d'autres méthodes. En effet, il n'eſt pas difficile de voir que cette recherche dépendroit (pour un corps ſphérique) de l'intégration d'une quantité de cette forme dz' cof. $z'^2 \sqrt{(a + b \text{ ſin. } z'^2)}$, intégration qui dépend de la rectification des ſections coniques. On voit par-là combien le choix des inconnues eſt important dans ces problêmes, comme dans beaucoup d'autres.

58. Si les axes CA, CK (Fig. 37) étoient deux diametres conjugués, faiſant entr'eux un angle $ACK = a$, on auroit (*art.* 39) la proportion $\frac{xx \text{ ſin. } z'^2}{\text{ſin. } a^2} :: cc - \left(\delta - \frac{x \text{ ſin. } (a - z')}{\text{ſin. } a}\right)^2 :: bb : cc$; d'où l'on tireroit la double valeur de x; & ſi δ étoit $= c$, c'eſt-à-dire, ſi le point A' attiré tomboit en A, on auroit $x = \frac{2\delta \text{ ſin. } (a - z')}{\text{ſin. } a \left[\frac{\text{ſin } z'^2}{\text{ſin. } a^2}\left(\frac{cc}{bb}\right) + \frac{\text{ſin. } (a - z')^2}{\text{ſin. } a^2}\right]}$. De-là il n'eſt pas difficile de trouver l'attraction qu'exerceroit ſur le point A le ſolide formé par la révolution de la demi-ellipſe ALO autour de AO. Car la difficulté ſe réduira à intégrer une quantité de la forme dz' ſin. z' cof. $z' \times x$. Or faiſant ſin. $z' = u$, on trouvera aiſément qu'il n'y aura dans la transformée d'autre radical que $\sqrt{(1 - uu)}$, qu'il eſt aiſé de faire diſparoître par les méthodes connues, & qui réduit l'intégration aux fractions rationnelles.

59. On peut même remarquer encore que ſi x eſt égal à une fonction de conſtantes & de l'angle z', telle qu'en faiſant ſin. $z' = u$, il n'y ait dans cette fonction d'autre radical que $\sqrt{(1 - uu)}$, l'attraction qu'exerceroit ſur le point A le ſolide formé par la révolution de la courbe non elliptique ALO autour de AO, ſe trouveroit de même par l'intégration d'une fraction rationnelle.

REMARQUES

SUR LE MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

(*a*) *Art.* 4. PUISQUE tang. $x = (art.\ 3)\ \frac{\text{cos. } n}{\text{cos. } \gamma} - \text{cos. } \vartheta) : \text{sin. } \vartheta = \frac{\text{cos. } n}{\text{sin. } \vartheta \text{ cos. } \gamma} - \frac{\text{cos. } \vartheta}{\text{sin. } \vartheta} = \frac{\text{cos. } n - \text{cos. } \vartheta \text{ cos. } \gamma}{\text{cos. } \gamma \text{ sin. } \vartheta}$; donc sin. x ou $\frac{\text{tang. } x}{\sqrt{(1 + \text{tang. } x^2)}} =$ à une quantité que j'appelle pour abréger $\varphi(\gamma, n, \vartheta)$, & cos. $x =$ de même à une autre quantité que j'appelle pour abréger $\Psi(\gamma, n, \vartheta)$. Si on veut avoir les expreſſions des ſinus & coſinus qui ne ſont ici qu'indiquées, on nommera (Fig. 33) FD & DE, n' & ϑ' au lieu de n & ϑ, afin de conſerver les dénominations de n & de ϑ pour FD' & $D'E$, & on aura tang. $x = \frac{\text{cos. } n' - \text{cos. } \vartheta' \text{cos. } \gamma}{\text{sin. } \vartheta' \text{cos. } \gamma}$; d'où $\sqrt{(1 + \text{tang. } x^2)} = \frac{\sqrt{(\text{cos. } n'^2 - 2 \text{ cos. } n' \text{cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma + \text{cos. } \gamma^2)}}{\text{sin. } \vartheta' \text{cos. } \gamma}$; donc sin. $x = \frac{\text{cos. } n' - \text{cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma}{\sqrt{(\text{cos. } n'^2 - 2 \text{ cos. } n' \text{ cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma + \text{cos. } \gamma^2)}}$; & cos. $x =$

$\frac{\text{cos. } \gamma \text{ sin. } \vartheta'}{\sqrt{(\text{cos. } \nu'^2 - 2 \text{ cos. } \nu' \text{ cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma + \text{cos. } \gamma^2)}}$; donc cosin. $FG = \frac{\sqrt{(\text{cos. } \nu'^2 - 2 \text{ cos. } \nu' \text{ cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma + \text{cos. } \gamma^2)}}{\text{sin. } \vartheta'}$, & sin. $FG = \frac{\sqrt{(\text{sin. } \vartheta'^2 - \text{cos. } \nu'^2 + 2 \text{ cos. } \nu' \text{ cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma - \text{cos. } \gamma^2)}}{\text{sin. } \vartheta'}$;

de-là on tirera la valeur de sin. E ou $\frac{\text{sin. } FG}{\text{sin. } \gamma} = \frac{\sqrt{(\text{sin. } \vartheta'^2 - \text{cos. } \nu'^2 + 2 \text{ cos. } \nu' \text{ cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma - \text{cos. } \gamma^2)}}{\text{sin. } \vartheta' \text{ sin. } \gamma}$; & cos. $E = \frac{\text{cos. } \nu' - \text{cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma}{\text{sin. } \vartheta' \text{ sin. } \gamma}$.

(*b*) *Art.* 5. On aura, de même que dans la Note précédente, la valeur de sin. D ou sin. $\rho = \frac{\text{sin. } FG}{\text{sin. } \nu'} = \frac{\sqrt{(\text{sin. } \vartheta'^2 - \text{cos. } \nu'^2 + 2 \text{ cos. } \nu' \text{ cos. } \vartheta' \text{ cos. } \gamma - \text{cos. } \gamma^2)}}{\text{sin. } \vartheta' \text{ sin } \nu'}$; & cos. D ou cos. $\rho = \frac{\text{cos. } \gamma - \text{cos. } \nu' \text{ cos. } \vartheta'}{\text{sin. } \vartheta' \text{ sin. } \nu'}$.

(*c*) *Art.* 7. Nommant l'angle $D'EF$, E', on aura facilement l'angle E', puisque les trois côtés ϑ, ν, γ, du triangle $D'EF$ sont connus, & on trouvera, comme dans la Note (*a*) précédente, & par analogie, sin. $E' = \frac{\sqrt{(\text{sin. } \vartheta^2 - \text{cos. } \nu^2 + 2 \text{ cos. } \nu \text{ cos. } \vartheta \text{ cos. } \gamma - \text{cos. } \gamma^2)}}{\text{sin. } \vartheta \text{ sin. } \gamma}$; & cos. $E' = \frac{\text{cos. } \nu - \text{cos. } \vartheta \text{ cos. } \gamma}{\text{sin. } \vartheta \text{ sin. } \gamma}$; de-là, & des valeurs de sin. E & cos. E, on tirera aisément la valeur de sin. DED' ou sin. $(E - E') =$ sin. E cos. $E' -$ cos.

cos. E sin. E', & celle de cos. $DED' =$ cos. E cos. $E' +$ sin. E' sin. E.

(*d*) *Art.* 10. On a $\frac{\text{sin. } D'P}{\text{sin. } (E - E')} = \frac{\text{sin. } \vartheta}{\text{sin. tot.}}$; d'où sin. $D'P =$ sin. ϑ sin. $(E - E')$; cosin. $D'P = \sqrt{[1 - \text{sin. } \vartheta^2 \text{ sin. } (E - E')^2]}$; cos. $EP = \frac{\text{cos. } \vartheta}{\text{cos. } D'P} = \frac{\text{cos. } \vartheta}{\sqrt{[1 - \text{sin. } \vartheta^2 \text{ sin. } (E - E')^2]}}$; donc sin. $EP = \frac{\text{sin. } \vartheta \text{ cos. } (E - E')}{\sqrt{[1 - \text{sin. } \vartheta^2 \text{ sin. } (E - E')^2]}}$; sin. $DP =$ sin. $(\vartheta' - EP) =$ sin. ϑ' cos. $EP -$ sin. EP cos. ϑ' ; cos. $DP =$ cos. ϑ' cos. $EP +$ sin. ϑ' sin. EP ; & enfin cos. DD' ou cos. $DP \times$ cos. $D'P =$ cos. ϑ' cos. $\vartheta +$ sin. ϑ' sin. ϑ cos. $(E - E')$, laquelle quantité eſt la même que le ſinus de $\alpha' + \sigma'$. Donc on aura sin. $D'D =$ cos. $(\alpha' + \sigma') = \sqrt{[1 - (\text{cos. } \vartheta' \text{ cos. } \vartheta + \text{sin. } \vartheta \text{ cos. } (E - E') \text{ sin. } \vartheta')^2]}$. Enfin pour avoir sin. ρ' & cos. ρ', c'eſt-à-dire, sin. LO & cos. LO, il faudra, dans les expreſſions trouvées ci-deſſus de sin. ρ & cos. ρ, mettre $\eta = FD'$ au lieu de $\gamma = EF$, $\eta' = FD$ au lieu de $\vartheta' = DE$, & au lieu de cos. η' & sin. η' mettre les coſinus & ſinus de $D'D$ qu'on vient de trouver.

Il faudra enfin ſe ſouvenir que sin. $\eta' =$ cos. $(\alpha' + \sigma)$; cos. $\eta' =$ sin. $(\alpha' + \sigma)$; que sin. $\vartheta' =$ cos. α', & cos. $\vartheta' =$ sin. α'.

On remarquera de plus que les valeurs de sin. E' & de cos. E' trouvées pag. 248 (*Note c*), ne renferment

que des ſinus & coſinus d'angles connus γ, η, ϑ, ces angles étant les élongations des Planetes attirantes, tant entr'elles qu'à l'axe de rotation de la Planete attirée. Ainſi on pourra laiſſer dans les calculs les quantités ſin. E' & coſ. E' ſans y ſubſtituer leur valeur; ce qui donnera des expreſſions moins compliquées.

(*e*) *Art.* 11. Quand il n'y a qu'une Planete attirante, il n'eſt pas néceſſaire de faire un calcul ſi compliqué, comme nous l'avons vu dans le Mém. précéd. p. 198, (*Note n*). Il a été prouvé que pour lors $\mathfrak{C} = 0$, c'eſt-à-dire, que l'axe de rotation & la ligne qui joint les centres des deux Planetes ſont dans le plan d'un des axes; on peut de plus remarquer que ſi on nomme ϖ la diſtance EG (Fig. 32) de l'axe de rotation au point G par où paſſe un des axes du ſphéroïde, on aura coſ. ϖ = coſ. α' coſ. $\mathfrak{C}'$; & que ſi on fait $DE = \nu$, diſtance du même axe de rotation à un des autres axes du ſphéroïde, on aura ſin. ν = coſ. α', & coſ. ν = ſin. α'.

(*f*) *Art.* 12. Soit pour abréger $\frac{A^3}{\delta^3} = \mu$, $\frac{A'^3}{\delta'^3} = \mu'$, & ainſi du reſte, autant qu'il y aura de corps attirans, on aura les équations ſuivantes (*Note n* du précédent Mémoire, pag. 198).

1°. $+ \omega$ ſin. $\mathfrak{C}'$ coſ. $\mathfrak{C}'$ coſ. $\alpha'^2 - 3\mu$ coſ. $(\alpha' + \sigma)^2 \times$ ſin. $(\mathfrak{C}' + \rho)$ coſ. $(\mathfrak{C}' + \rho) - 3\mu'$ coſ. $(\alpha' + \sigma')^2$ ſin. $(\mathfrak{C} + \rho')$ coſ. $(\mathfrak{C}' + \rho') - 3\mu''$ coſ. $(\alpha' + \sigma'')^2$ ſin.

$(\mathcal{C}' + \rho'')$ cos. $(\mathcal{C}' + \rho'')$ &c. $= 0$, dans laquelle il n'y a d'inconnues que α', $\mathcal{C}'$, & σ, les autres quantités étant exprimées, par les Notes précédentes, en γ, η, ϑ, η', ϑ', α', σ, σ', &c.

2°. $+ \omega$ sin. α' cos. α' cos. $\mathcal{C}' - 3\mu$ sin. $(\alpha' + \sigma) \times$ cos. $(\alpha' + \sigma)$ cos. $(\mathcal{C}' + \rho) - 3\mu'$ (sin. $\alpha' + \sigma'$) cos. $(\alpha' + \sigma')$ cos. $(\mathcal{C}' + \rho')$, &c. $= 0$.

3°. $+ \omega$ sin. α' cos. α' sin. $\mathcal{C}' - 3\mu$ sin. $(\alpha' + \sigma) \times$ cos. $(\alpha' + \sigma)$ sin. $(\mathcal{C}' + \rho) - 3\mu'$ (sin. $\alpha' + \sigma'$) cos. $(\alpha' + \sigma')$ sin. $(\mathcal{C}' + \rho')$, &c. $= 0$.

On tirera de ces équations les valeurs des sinus & cosinus de α', de $\mathcal{C}'$ & de σ.

(g) *Art.* 13. Ces deux équations seront,

1°. $A' + \mu - 3\mu$ cos. $(\mathcal{C}' + \rho)^2$ cos. $(\alpha' + \sigma)^2 + \mu' - 3\mu'$ (cos. $\mathcal{C}' + \rho')^2$ cos. $(\alpha' + \sigma')^2 +$ &c. $+ \omega \times (-1 +$ cos. $\mathcal{C}'^2$ cos. $\alpha'^2) = A''' m' m' + \mu m' m' - 3\mu m' m'$ cos. $(\alpha' + \sigma)^2$ sin. $(\mathcal{C}' + \rho)^2 + \mu' m' m' - 3\mu' m' m'$ cos. $(\alpha' + \sigma')^2$ sin. $(\mathcal{C}' + \rho')^2$, &c. $+ \omega (-1 +$ sin. $\mathcal{C}'^2$ cos. $\alpha'^2)$.

2°. $m^2 A' + \mu m^2 - 3 m^2 \mu$ sin. $(\alpha' + \sigma)^2 + \mu' m^2 - 3 m^2 \mu'$ sin. $(\alpha' + \sigma')^2 +$ &c. $- m^2 \omega$ cos. $\alpha'^2 = A''' + \mu - 3\mu$ cos. $(\alpha' + \sigma)^2$ sin. $(\mathcal{C}' + \rho)^2 + \mu' - 3\mu'$ cos. $(\alpha' + \sigma')^2$ sin. $(\mathcal{C}' + \rho')^2$, &c. $+ \omega (-1 +$ sin. $\mathcal{C}'^2$ cos. $\alpha'^2)$.

Pour rendre le calcul plus simple, on remarquera que l'arc $GH = \mathcal{C}'$ (Fig. 32) peut varier comme on voudra, tous les autres angles α', $\alpha' + \sigma$, ρ, γ, η, ϑ,

demeurant les mêmes ; d'où il s'enſuit que les valeurs de ces angles ſont indépendantes de la valeur de ſin. ζ' & cof. ζ' ; mettant donc au lieu des ſinus & coſinus de $(\zeta' + \rho)$, & au lieu des ſinus & coſinus de $(\zeta' + \rho')$ leurs valeurs ſin. ζ' cof. ρ + ſin. ρ cof. ζ', &c. dans les trois équations de la Note (f) p. 250 & 251, on tirera aiſément de la ſeconde & de la troiſiéme la valeur de $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{\text{cof. } \zeta'}$ ou tang. ζ' exprimée en ſinus & coſinus des autres angles ; la premiere équation de la Note (f) donnera de même une équation dans laquelle $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{\text{cof. } \zeta'}$ montera au ſecond degré. Comparant les deux valeurs de $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{\text{cof. } \zeta'}$ trouvées par le moyen de la ſeconde & de la troiſiéme équation, on aura une nouvelle équation où ζ' ne ſera plus ; & ſubſtituant dans l'équation où $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{\text{cof. } \zeta'}$ monte au ſecond degré, la valeur de $\frac{\text{ſin. } \zeta'}{\text{cof. } \zeta'}$ déja trouvée, on aura encore une autre équation où ζ' ne ſera plus ; on aura donc deux équations où il n'y aura d'inconnues que α' & $\alpha' + \sigma$, ou α' & σ ; toutes les autres quantités ρ, σ', ρ', &c. étant connues en α', σ, γ, η, ϑ, &c. Nommant donc z le ſinus de α', z' celui de σ, on ſubſtituera z & z' au lieu de ſin. α' & ſin. σ dans ces équations, & y, y' au lieu de leurs coſinus ; il eſt clair de plus qu'on a $1 - yy = zz$, & $1 - y'y' = z'z'$. Au moyen de ces deux équations & des deux équations

trouvées, on aura une valeur de ζ' en ζ par les régles de l'élimination, & une équation finale en ζ' ou sin. α' ; équation qu'il est maintenant facile de trouver, & dont j'abandonne l'analyse au Lecteur.

Si on suppose que les corps attirans soient tous placés dans le même plan, on aura pour lors l'angle $D'EF$ ou E' par-tout égal à zéro, & cos. $D'D$ = cos. $\vartheta' \times$ cos. ϑ + sin. ϑ' sin. ϑ cos. E = cos. ϑ' cos. ϑ + $\frac{\text{sin. } \vartheta}{\text{sin. } \gamma} \times$ (cos. η' — cos. ϑ' cos. γ) = sin. α' cos. ϑ + $\frac{\text{sin. } \vartheta}{\text{sin. } \gamma} \times$ [sin. $(\alpha' + \sigma)$ — sin. α' cos. γ]. Ce qui rendra les calculs plus simples.

Si de plus le plan où se trouvent les corps attirans étoit tel que l'axe de rotation y fût placé, alors il n'est pas difficile de voir par la Note (n) du Mém. précéd. p. 198, que $\mathfrak{C}'$ seroit = 0, ce qui donneroit sin. $\mathfrak{C}'$ = 0, cos. $\mathfrak{C}'$ = 1. Pour lors, des trois équations de la Note (f) ci-dessus, p. 251, il ne subsisteroit plus que la seconde ; & en supposant α ou $\alpha' + \sigma = \alpha' + \varepsilon'$, $\alpha' + \sigma' = \alpha' + \varepsilon''$, &c. & ainsi de suite, les quantités ε', ε'', &c. seroient les élongations des corps attirans à l'axe de rotation ; mettant donc au lieu de sin. $\alpha \times$ cos. α, & des quantités analogues, leurs valeurs $\frac{\text{sin. } (2\alpha' + 2\varepsilon')}{2}$ = $\frac{\text{sin. } 2\alpha' \text{ cos. } 2\varepsilon'}{2} + \frac{\text{sin. } 2\varepsilon' \text{ cos. } 2\alpha'}{2}$, $\frac{\text{sin. } 2\alpha' \text{ cos. } 2\varepsilon''}{2} + \frac{\text{sin. } 2\varepsilon'' \text{ cos. } 2\alpha'}{2}$, &c. on aura, en divisant par sin. $2\alpha'$,

une équation où il n'y aura d'inconnue que $\frac{\text{cof. } 2\alpha'}{\text{ſin. } 2\alpha'}$ ou cotang. α', élevée au premier degré, ce qui donnera α'.

On aura de même des équations analogues à celles de la Note (f) pag. 251, en mettant dans ces équations l'unité au lieu de cof. $(\mathcal{C}' + \rho)$, cof. $(\mathcal{C}' + \rho')$, &c. & en effaçant les termes où ſe rencontrent ſin. $(\mathcal{C}' + \rho)$, ſin. $(\mathcal{C}' + \rho')$, &c.

(h) *Art.* 30. Soit $r' = r + \mathcal{C}$, ou plutôt $r(1 + \alpha \text{ ſin. } \zeta^2)$ le rayon variable du ſphéroïde, $\rho' = \rho + \gamma$, ou plutôt $\rho(1 + \alpha' \text{ ſin. } \zeta^2)$ celui du noyau; on aura $\frac{dr}{r' d\zeta} = \alpha(\text{ſin. } 2\zeta + \Sigma)$, Σ étant une très-petite quantité, qui dépend de ζ & de la figure non elliptique du ſphéroide; de plus $\frac{dr'}{r' d\zeta}$ eſt égal au rapport de l'attraction perpendiculaire au rayon r', à l'attraction dans la direction du rayon r'. Or, ſuppoſant δ la denſité du fluide, Δ celle du noyau, n le rapport de la demi-circonférence au rayon, cette derniere attraction eſt $\frac{4n\delta r}{3} + \frac{4n(\Delta - \delta)\rho^3}{3r^2} + \Psi$, Ψ étant une très-petite quantité qui dépend de α & de α', de la force centrifuge & de l'angle ζ. Et à l'égard de l'attraction ou plutôt de la puiſſance perpendiculaire aux rayons r' & ρ', elle ſera d'abord à cauſe de la force centrifuge $\frac{\Phi \text{ ſin. } 2\zeta(1 + \Gamma)}{2}$, Γ étant encore une très-petite quan-

tité qui dépend de α, α' & ζ, & de plus $\left[\frac{4n\delta r\alpha}{5} + \frac{4n(\Delta-\delta)\varrho^5\alpha'}{5r^4}\right]$ sin. $2\zeta + \Omega$, Ω étant de même une quantité très-petite dépendante de α, α' & ζ. Donc en n'ayant d'égard qu'aux termes affectés de sin. 2ζ, on auroit $\alpha \times (1 + \Sigma')$ égal à la quantité $\frac{\varphi(1+\Gamma')}{2} + \frac{4n}{5}\left[r\alpha\delta + \frac{(\Delta-\delta)\varrho^5\alpha'}{r^4}\right]$ divisé par $\frac{4n\delta r}{3} + \frac{4n(\Delta-\delta)\varrho^3}{3\cdot r^2} + \Psi'$; donc en négligeant d'abord les quantités Σ', Γ' & Ψ', on aura $\alpha\left(1 - \frac{3r\delta}{5\cdot\left[\delta r + \frac{(\Delta-\delta)\varrho^3}{r^2}\right]}\right) = \frac{\varphi}{2} + \frac{3(\Delta-\delta)\varrho^5\alpha'}{5r^4\left[\delta r + \frac{(\Delta-\delta)\varrho^3}{r^2}\right]}$.

Si on veut que $\alpha = \alpha'$, il est évident que $\alpha\left(1 - \frac{3r\delta}{5\left[\delta r + \frac{(\Delta-\delta)\varrho^3}{r^2}\right]} - \frac{3(\Delta-\delta)\varrho^5}{5r^4\left[\delta r + \frac{(\Delta-\delta)\varrho^3}{r^2}\right]}\right) = \frac{\varphi}{2}$, ou $\alpha = \frac{\varphi}{2} : \left[\frac{2r^5\delta + 5(\Delta-\delta)\varrho^3r^2 - 3(\Delta-\delta)\varrho^5}{5r^5\delta + 5(\Delta-\delta)\varrho^3r^2}\right]$.

Si ρ est presque $= r$, & que Δ & δ soient réels & finis, on aura α égal à très-peu près $\frac{5\varphi\Delta}{2p\cdot 2\Delta} = \frac{5\varphi}{4p}$, comme si le sphéroïde étoit homogene; & en effet il n'est pas difficile de voir, comme on l'a déja remarqué pag. 226, que le sphéroïde n'ayant (*hyp.*) qu'une très-petite partie qui soit de la densité δ, & ayant $\alpha = \alpha'$, doit être sensiblement de même figure que s'il étoit de

la denſité Δ par-tout. Mais il ne ſera pas de la même figure que s'il étoit par-tout de la denſité δ, la force centrifuge φ étant ſuppoſée demeurer la même. Car ſi le ſphéroïde étoit par-tout de la denſité δ, la peſanteur p ſeroit à celle qui réſulteroit de la denſité Δ, comme δ à Δ; & α ſeroit en raiſon inverſe de δ à Δ, φ étant ſuppoſé le même dans les deux ſphéroïdes homogenes, l'un de la denſité δ; l'autre de la denſité Δ.

Au reſte, les réſultats précédens n'auront plus lieu ſi Δ eſt $= 0$, ou très-petit, c'eſt-à-dire, ſi la Planete eſt creuſe en dedans, ou remplie d'une matiere infiniment rare, recouverte d'une calotte très-mince de denſité quelconque. Car alors r étant preſque $= \rho$, & $\Delta - \delta$ preſque $= -\delta$, le dénominateur de la valeur de α devient preſque $= 0$, de ſorte qu'on a $\alpha = \infty$, valeur illuſoire, puiſque la ſolution générale ſuppoſe que α ſoit toujours très-petit; & que d'ailleurs les quantités Σ', Γ' & Ψ' ne peuvent plus ici être négligées par rapport aux autres.

Suivant la formule donnée par M. Clairaut, p. 221 de ſon Livre *de la Figure de la Terre*, que je ſuppoſe qu'on ait ici ſous les yeux, il paroît que ſi $\alpha = \alpha'$, c'eſt-à-dire, ſi la quantité que M. Clairaut nomme p eſt $= 0$, on aura $f = \frac{-1}{\infty + 1} = 0$, & $\Delta = \delta$. Cependant il eſt clair par ce qui précéde, que la condition de $\Delta = \delta$ n'eſt point néceſſaire pour que $\alpha = \frac{5\varphi}{4}$, mais

mais que Δ peut avoir tel rapport qu'on voudra avec δ, pourvû que ce rapport ſoit fini. Il faut de plus remarquer que la différence λ des axes du ſphéroïde & du noyau, étant ſuppoſée très-petite dans l'équation $f = \frac{-1}{\frac{3\lambda}{p}+1}$ que donne M. Clairaut, alors ſi on ſuppoſe la quantité qu'il appelle p, non pas zéro abſolu, mais infiniment petit, on aura $f = \frac{-1}{C+1}$, C pouvant être une quantité finie; d'où $f+1$ ou $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{C}{C+1}$; c'eſt-à-dire, $\Delta < \delta$. Pour voir ſi cette concluſion réſulte de nos formules, ſuppoſons toujours ρ preſque égal à r, ou $\rho = r + \gamma r$, γ étant très-petit, on aura $\alpha = \frac{5\phi}{2} : \left[\frac{2\Delta}{\Delta + 3\gamma\Delta - 3\delta\gamma}\right] = \frac{5\phi[\Delta + 3\gamma(\Delta-\delta)]}{4\Delta}$; & comme γ eſt négatif, il eſt clair 1°. que ſi $\alpha = \frac{5\phi}{4}$, on aura $\Delta = \delta$, en ſuppoſant cette formule exacte à la rigueur; 2°. que ſi α eſt $> \frac{5\phi}{4}$, c'eſt-à-dire, ſi p eſt poſitif, il faudra que $\Delta - \delta$ ſoit négatif, c'eſt-à-dire, $\Delta < \delta$, comme il réſulte du calcul de M. Clairaut. Mais comme γ eſt fort petit, la valeur de α ſe réduit ſenſiblement à $\frac{5\phi}{4}$, quels que ſoient Δ & δ. Au reſte, lorſqu'on veut avoir égard à la différence très-petite des rayons r, ρ, & de plus lorſque Δ eſt $= 0$ ou très-petit, alors l'équation qu'on

vient de trouver pour la valeur de α n'eſt pas exacte, à cauſe des quantités Γ' & Ψ' qu'on a négligées dans le calcul, & qui ſont de l'ordre de $\alpha\Delta$, & par conſéquent du même ordre que $\varphi\gamma$. Ainſi il faut pour ce cas une analyſe particuliere, & les calculs précédens, non plus que ceux de M. Clairaut, ne peuvent plus être utiles. Mais il demeure toujours évident, par ce qui a été démontré ci-deſſus (voyez le préſent Mémoire, art. 29, p. 225), que ſi $\alpha = \alpha'$, & que ρ ſoit preſque $= r$, on aura δ égal à tout ce qu'on voudra, pourvû que Δ ſoit fini.

Au reſte, il ne faut pas oublier ce que nous avons dit (*art.* 16, p. 217) qu'à l'exception du cas d'un ſphéroïde homogene, toutes les ſolutions données juſqu'ici du problême de la Figure de la Terre ne ſont qu'approchées. Ainſi la ſeule vérité qui réſulte rigoureuſement des aſſertions précédentes, c'eſt que ſi ρ eſt preſque $= r$, ſi α' eſt preſque $= \alpha$, & $\alpha = \frac{5\varphi}{4p}$, p étant ici la peſanteur à l'équateur & φ la force centrifuge; il ne s'en faudra que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre que le ſphéroïde ne ſoit en équilibre, quelle que ſoit la denſité δ, pourvû que Δ ne ſoit ni $= 0$, ni infiniment petit.

Nous obſerverons encore que ſi une Planete eſt ſuppoſée creuſe en-dedans, ou qu'en général il y ait un eſpace vuide entre le noyau & le fluide, il faudra pour l'équilibre 1°. que la couche intérieure du fluide ſoit

de niveau comme la ſupérieure ; 2°. que ſi on imagine un canal rectiligne tendant au centre & terminé par les deux couches du fluide, la peſanteur de ce canal ſoit nulle. Il ſera aiſé de voir, d'après ces deux conditions, ſi une Planete peut avoir une matiere fluide ſuſpendue autour d'elle, & qui l'enveloppe en tout ſens, cette matiere fluide étant ſuppoſée homogene ou non. C'eſt un problême dont la ſolution peut ſe trouver aiſément, au moyen des formules connues pour l'attraction des ſphéroïdes qui different peu d'une ſphere.

XLIX. MÉMOIRE.

Eclairciſſemens ſur une prétendue loi de la Réfraction de la Lumiere.

1. Soit P ou $\frac{1}{m}$ le rapport du ſinus d'incidence d'un rayon de Lumiere au ſinus de réfraction, en paſſant du milieu A dans le milieu B; ſoit $\frac{1}{M}$ le rapport du ſinus d'incidence d'un pareil rayon au ſinus de réfraction, en paſſant du milieu A dans le milieu C, $\frac{1}{m'}$ & $\frac{1}{M'}$ les rapports des ſinus d'incidence & de réfraction pour les rayons d'une autre couleur; M. Newton a prétendu qu'on auroit toujours $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$; c'eſt-à-dire, $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ égale à une quantité conſtante α;

quels que ſoient les milieux *B*, *C*, pourvû que le paſſage ſe faſſe toujours en partant du milieu *A*.

2. Cette loi a été reconnue fauſſe par les expériences de M. Dollond, qui d'abord l'avoit crue vraie; mais avant ces expériences, de grands Géometres avoient cru pouvoir démontrer la fauſſeté de cette loi par le ſimple raiſonnement. Je crois avoir prouvé (& on le verra encore à la fin de ce Mémoire) que leur démonſtration eſt inſuffiſante. Voyez *Opuſc. Mathém.* Tome III, art. 873 & ſuiv.

3. Feu M. Klingenſtierna avoit auſſi cru trouver une pareille démonſtration, rapportée & adoptée par M. Clairaut dans les Mém. de l'Acad. de 1756. La briéveté de la démonſtration de M. Klingenſtierna, & la maniere dont la queſtion y eſt préſentée, m'avoit fait croire d'abord qu'elle étoit fondée ſur la même ſuppoſition arbitraire que j'avois reprochée à d'autres grands Géometres; mais ayant depuis examiné de nouveau la démonſtration dont il s'agit, à la priere d'un ami de M. Klingenſtierna, j'ai reconnu que ce ſavant Mathématicien n'avoit point fait la ſuppoſition que j'avois cru, ou du moins que cette ſuppoſition n'étoit pas une ſuite néceſſaire de ſa démonſtration. Cependant cette démonſtration ne m'en paroît pas plus ſolide, & c'eſt ce que je vais tâcher de prouver.

4. Le rapport des ſinus, en paſſant du milieu *A* dans le milieu *B*, étant $\frac{1}{m}$ pour les rayons de la couleur

K, & $\frac{1}{m'}$ pour ceux de la couleur Q, & le rapport des mêmes ſinus, en paſſant du milieu A dans le milieu C, étant $\frac{1}{M}$ & $\frac{1}{M'}$, le rapport des ſinus, en paſſant du milieu B dans le milieu A, ſera $\frac{m}{1}$ & $\frac{m'}{1}$, ou ſimplement m & m'; & en paſſant du milieu B dans le milieu C, il ſera $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$, que j'appelle μ & μ'. M. Klingenſtierna ſe propoſe de démontrer que $\frac{1-m}{1-m'}$ n'eſt pas $= \frac{1-\mu}{1-\mu'}$.

5. En ſuppoſant ſa démonſtration rigoureuſe & générale, il en réſulteroit qu'en effet $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ n'eſt pas $= \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$; car ſi cette derniere équation avoit lieu, on auroit (en mettant pour $\frac{1}{M}$ ſa valeur $\frac{\mu}{m}$, pour $\frac{1}{M'}$ ſa valeur $\frac{\mu'}{m'}$, & en réduiſant) l'équation $\frac{1-m}{1-m'} = \frac{\mu-m}{\mu'-m'}$, ou $\frac{\mu-m}{1-m} = \frac{\mu'-m'}{1-m'}$, ou $\frac{\mu-1}{1-m} = \frac{\mu'-1}{1-m'}$, ou $\frac{\mu-1}{\mu'-1} = \frac{1-m}{1-m'}$, ou enfin, $\frac{1-m}{1-m} = \frac{1-\mu}{1-\mu'}$, équation dont M. Klingenſtierna ſe propoſe de démontrer la fauſſeté. Mais en examinant avec attention la

démonſtration de M. Klingenſtierna, il eſt aiſé de voir qu'il ne démontre pas *en général* que $\frac{1-m}{1-m'}$ n'eſt pas $= \frac{1-\mu}{1-\mu'}$, mais ſeulement pour une hypothèſe particuliere, c'eſt-à-dire, pour l'hypothèſe que les rayons de différente couleur qui tombent parallèles ſur le priſme, puiſſent en ſortir parallèles. C'eſt ce que je vais tâcher de développer.

6. Soit C l'angle d'incidence dans le paſſage du milieu A au milieu B, & ρ l'angle de réfraction ; ſoit auſſi α l'angle du priſme que M. Klingenſtierna ſuppoſe placé entre les milieux A & C, priſme dont la matiere eſt d'une denſité égale à celle du milieu B (*a*) ; les ſuppoſitions & la conſtruction de M. Klingenſtierna donnent $\frac{1}{m} = \frac{\text{ſin. } C}{\text{ſin. } \varrho}$, ou $m = \frac{\text{ſin. } \varrho}{\text{ſin. } C}$; l'angle d'incidence, en paſſant du priſme ou du milieu B dans le milieu C, ſera par la même conſtruction $\alpha + \rho$, & l'angle de réfraction (en ſuppoſant que le rayon émergent ſoit parallèle au rayon incident) ſera $C + \alpha$, & il faudra que $\mu = \frac{\text{ſin. } (\varrho + \alpha)}{\text{ſin. } (C + \alpha)}$.

7. Suppoſant donc $m' = m + dm$ (dm étant poſitif ou négatif) & $\mu' = \mu + d\mu$, on aura les équations ſuivantes,

1°. $m = \frac{\text{ſin. } \varrho}{\text{ſin. } C}$ ou ſin. $\rho = m$ ſin. C.

(*a*) Voyez la Figure de M. Klingenſtierna, Mém. Acad. 1756, pag. 405.

2°. $\mu = \frac{\text{sin.}(\varrho+\alpha)}{\text{sin.}(C+\alpha)} = \frac{\text{sin.}\,\varrho\,\text{cos.}\,\alpha+\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\varrho}{\text{sin.}\,C\,\text{cos.}\,\alpha+\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,C} = \frac{\text{sin.}\,\varrho+\text{tang.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\varrho}{\text{sin.}\,C+\text{tang.}\,\alpha\,\text{cos.}\,C} = \frac{m\,\text{sin.}\,C+\text{tang.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\varrho}{\text{sin.}\,C+\text{tang.}\,\alpha\,\text{cos.}\,C}$.

8. Différentions cette équation en regardant α & C comme conſtans, μ & ρ comme variables, & nous aurons en mettant pour $d\rho$ ſa valeur $\frac{dm\,\text{sin.}\,C}{\text{cos.}\,\varrho}$ & pour sin. ρ ſa valeur m sin. C, l'équation ſuivante, $d\mu = \frac{dm\,\text{sin.}\,C\left(1-\frac{m\,\text{tang.}\,\alpha\,\text{cos.}\,C}{\text{cos.}\,\varrho}\right)}{\text{sin.}\,C\left(1+\frac{\text{tang.}\,\alpha\,\text{cos.}\,C}{\text{sin.}\,C}\right)}$; d'où l'on tire

3°. $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1-\frac{m\,\text{sin.}\,C\,\text{tang.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\varrho}}{1+\frac{\text{tang.}\,\alpha}{\text{tang.}\,C}}$.

9. Soit donc $\frac{d\mu}{dm} = k$, $\frac{m\,\text{sin.}\,C}{\text{cos.}\,\varrho}$ ou $\frac{m\,\text{sin.}\,C}{\sqrt{(1-m^2\,\text{sin.}\,C^2)}} = \omega$, $\frac{1}{\text{tang.}\,C}$ ou $\frac{\text{cos.}\,C}{\text{sin.}\,C} = \sigma$; on aura $k = \frac{1-\omega\,\text{tang.}\,\alpha}{1+\sigma\,\text{tang.}\,\alpha}$ & tang. $\alpha = \frac{1-k}{k\sigma+\omega}$.

10. De-là il eſt évident que m, C & $\frac{d\mu}{dm}$ étant donnés, ſi on veut que les rayons émergens de toutes les couleurs ſortent parallèles entr'eux & parallèles aux incidens, α doit avoir une certaine valeur dépendante de m, C & $\frac{d\mu}{dm}$; & par conſéquent auſſi que $\mu = \frac{\text{sin.}(\varrho+\alpha)}{\text{sin.}(C+\alpha)}$ devra avoir une certaine valeur dépendante

des

des mêmes quantités m, $\mathcal{C}$ & $\frac{d\mu}{dm}$; enſorte que ſi l'angle ſeul $\mathcal{C}$ devient différent, μ & $\frac{d\mu}{dm}$ demeurant les mêmes, il n'y aura plus de parallèliſme.

11. Les mêmes équations $m = \frac{\text{ſin.}\,\varrho}{\text{ſin.}\,\mathcal{C}}$ & $\mu = \frac{\text{ſin.}\,(\varrho+\alpha)}{\text{ſin.}\,(\mathcal{C}+\alpha)}$ ou $\mu = \frac{\text{ſin.}\,\varrho\,\text{cof.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\varrho}{\text{ſin.}\,\mathcal{C}\,\text{cof.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\mathcal{C}} = \frac{m\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}\,\text{cof.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\varrho}{\text{ſin.}\,\mathcal{C}\,\text{cof.}\,\alpha + \text{ſin.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\mathcal{C}} = \frac{m\,\text{ſin.}\,\mathcal{C} + \text{tang.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\varrho}{\text{ſin.}\,\mathcal{C} + \text{tang.}\,\alpha\,\text{cof.}\,\mathcal{C}}$, donnent $\text{tang.}\,\alpha = \frac{(\mu - m)\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}}{\text{cof.}\,\varrho - \mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}}$; c'eſt la valeur que doit avoir α (μ, m, $\mathcal{C}$ étant donnés) pour que les rayons ſortent du priſme parallèlement à leur premiere poſition.

12. Si $\mu = m$, c'eſt-à-dire, ſi le milieu C eſt le même que le milieu B, on aura $\alpha = 0$; c'eſt-à-dire, que le rayon émergent ne pourra être parallèle au rayon incident, à moins que l'angle du priſme ne ſoit nul. Donc ſi un priſme eſt environné d'un ſeul & même milieu, le rayon émergent du priſme ne pourra jamais être parallèle au rayon incident ſur le priſme.

13. Reprenons maintenant la formule générale de l'*art.* 11. Puiſque α eſt ſuppoſé conſtant, & le doit être, ainſi que $\mathcal{C}$, (dans l'hypothèſe que les rayons émergens ſortent parallèles aux incidens) on aura $\frac{(d\mu - dm)\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}}{(\mu - m)\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}} = \frac{d\,\text{cof.}\,\varrho - d\mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}}{\text{cof.}\,\varrho - \mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}}$, ou $\frac{d\mu - dm}{\mu - m} = \frac{-d\varrho\,\text{ſin.}\,\varrho + d\mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}}{\text{cof.}\,\varrho - \mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}}$ $= \frac{\frac{-m\,dm\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}}{\text{cof.}\,\varrho} - d\mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}}{\text{cof.}\,\varrho - \mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}} = \frac{-m\,dm\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}^2 - d\mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}\sqrt{(1 - m^2\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}^2)}}{1 - m^2\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}^2 - \mu\,\text{cof.}\,\mathcal{C}\sqrt{(1 - m^2\,\text{ſin.}\,\mathcal{C}^2)}}$;

équation d'où l'on tirera, quand la choſe ſera poſſible, la valeur de $\mathcal{C}$.

14. On peut remarquer en paſſant, que ſi μ eſt $< m$, & qu'en même-temps m ſoit < 1, la valeur de tang. α ſera négative; car le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de tang α, ſera négatif, & le dénominateur ſera poſitif, puiſque m étant (*hyp.*) < 1, $\frac{\text{cof. } \varrho}{\text{ſin. } \mathcal{C}}$ ou $\frac{\sqrt{(1 - m^2 \text{ ſin. } \mathcal{C}^2)}}{\sqrt{(1 - \text{ſin. } \mathcal{C}^2)}}$ eſt $> m$, & qu'ainſi $\frac{\text{cof. } \varrho}{\text{ſin. } \mathcal{C}} - \mu$ eſt $> m - \mu$, & par conſéquent poſitif. Donc alors on trouvera pour α une valeur négative; ce qui ne ſignifie pas que l'angle α du priſme ait en ce cas une valeur illuſoire, mais ſimplement que μ au lieu d'être $= \frac{\text{ſin. } (\varrho + \alpha)}{\text{ſin. } (\mathcal{C} + \alpha)}$ ſera $= \frac{\text{ſin. } (\varrho - \alpha)}{\text{ſin. } (\mathcal{C} - \alpha)}$, α étant l'angle du priſme. Et en effet, il eſt aiſé de voir par la conſtruction de M. Klingenſtierna, que ſi TG ou μ (Fig. 38) eſt $< TI$ ou m, l'angle $IHG = \alpha$, qui eſt l'angle du priſme, ſe trouvera placé à gauche de IH, & non à droite comme dans la figure de M. Klingenſtierna.

15. On peut remarquer auſſi, que ſi μ & m ſont fort peu différens de l'unité, $\mu - m$ ſera fort petit, mais tang. α, ni par conſéquent α, ne ſeront pas pour cela très-petits; car le numérateur $\mu - m$ de la valeur de tang. α ſera à la vérité fort petit, mais à cauſe de μ & de m fort peu différens de l'unité, cof. $\rho - \mu$ cof. $\mathcal{C}$ ou $\sqrt{(1 - m^2 \text{ ſin. } \mathcal{C}^2)} - \mu\sqrt{(1 - \text{ſin. } \mathcal{C}^2)}$ ſera auſſi très-petit. Donc tang. α & α pourront être des quantités

finies ; & en effet, il eſt aiſé de voir par la conſtruction même de M. Klingenſtierna, que ſi on ſuppoſe les points *I* & *G* fort près de *H*, c'eſt-à-dire, *TI* & *TG* preſque égales à l'unité *TH*, l'angle *IHG* ou α ne ſera pas pour cela très-petit, puiſque les tangentes des arcs *TGH*, *TIH*, au point *H*, font entr'elles un angle fini, égal à la moitié de la différence des degrés de l'arc *TGH* & de l'arc *TIH*.

16. La raiſon qui m'engage à faire cette derniere remarque, c'eſt que le même Savant, ami de feu M. Klingenſtierna, qui m'a engagé à examiner de nouveau ſa démonſtration, ſemble ſuppoſer, dans l'écrit qu'il m'a communiqué à ce ſujet, que ſi m & μ different très-peu de l'unité, l'angle α du priſme doit être fort petit pour que les rayons émergens ſortent parallèles aux rayons incidens ; ce qui n'eſt pas.

17. Toutes ces remarques ſuppoſées, ſi dans la conſtruction de M. Klingenſtierna (Mém. Acad. 1756, pag. 405) on imagine l'arc *HOo* (Fig. 39) appartenant au demi-cercle qui a pour diametre *TH*, on ſait par la Géométrie élémentaire que l'arc *Oo* eſt égal à l'arc *Ll* décrit du centre *T*, & que par conſéquent il contient le double de degrés, les rayons étant comme 1 à 2 ; donc l'angle OHo eſt $>$ l'angle LHl, donc l'angle $oHl > OHL$. Donc puiſque les angles droits *Hol*, *HOL* ſont égaux, il eſt aiſé de conclure de la démonſtration de M. Klingenſtierna, que $\frac{ol}{OL} > \frac{Ho}{HO}$;

or $\frac{Ho}{HO} = \frac{go}{GO}$, & $\frac{go}{GO} = \frac{ig}{IG}$; donc $\frac{lo}{LO} > \frac{go}{GO}$; donc $\frac{go+lo}{GO+LO}$ ou $\frac{lg}{LG} > \frac{go}{GO} = \frac{gi}{GI}$; donc $\frac{lg+gi}{LG+GI}$ ou $\frac{li}{LI} < \frac{lg}{LG}$. Donc en faiſant $TI = m$, $Ti = m - dm$, $TG = \mu$, $Tg = \mu - d\mu$, on aura $\frac{1-m+dm}{1-m} < \frac{1-\mu+d\mu}{1-\mu}$ ou $\frac{dm}{1-m} < \frac{d\mu}{1-\mu}$. Donc il faut pour le parallèliſme des rayons que $\frac{d\mu}{1-\mu}$ ſoit $> \frac{dm}{1-m}$, μ étant ſuppoſé $> m$, comme dans cette figure 39. Si Tig tomboit au-deſſous de TIG, on auroit $Ti = m + dm$, $TG = \mu + d\mu$, $\frac{li}{LI} > \frac{lg}{LG}$; $\frac{1-m-dm}{1-m} > \frac{1-\mu-d\mu}{1-\mu}$, & $\frac{d\mu}{1-\mu} > \frac{dm}{1-m}$; comme on vient de le trouver.

18. On peut prouver analytiquement la même vérité en conſidérant, que ſuivant les noms donnés ci-deſſus $\frac{d\mu}{dm}$ ſera à $\frac{1-\mu}{1-m}$ comme $(1-m)\left(1 - \frac{m \text{ tang. } \alpha \text{ ſin. } C}{\sqrt{(1-m^2 \text{ ſin. } C^2)}}\right)$ eſt à $1 - m + \text{tang. } \alpha \left(\frac{\text{cof. } C}{\text{ſin. } C} - \frac{\sqrt{(1-m^2 \text{ ſin. } C^2)}}{\text{ſin. } C}\right)$; ainſi, pour démontrer que $\frac{dm}{1-m}$ eſt $< \frac{d\mu}{1-\mu}$, ou $\frac{d\mu}{dm} > \frac{1-\mu}{1-m}$, la queſtion ſe réduit à prouver que $-m(1-m)$ ſin. C^2 eſt $>$ cof. $C\sqrt{(1-m^2 \text{ ſin. } C^2)} - 1 + m^2$ ſin. C^2, ou que $1 - m$ ſin. C^2 eſt $>$ cof. $C \times$

$V(1 - m^2 \text{ sin. } \mathcal{C}^2)$, ou que (en élevant au quarré & réduiſant) $- 2m$ eſt $> - m^2 - 1$, c'eſt-à-dire, $(m - 1)^2$ poſitif, ce qui eſt évident.

19. M. Klingenſtierna a donc ſeulement prouvé, que ſi dans le paſſage d'un milieu A à tant d'autres milieux qu'on voudra, $\frac{1-m}{1-m'}$ eſt conſtant, on ne pourra jamais diſpoſer trois milieux de ſuite, le premier étant A, & les deux autres quelconques, de maniere, que ſi le ſecond milieu a une figure priſmatique, un faiſceau de rayons émergens ſoit parallèle au faiſceau des mêmes rayons incidens. Or ce défaut de parallèliſme n'implique en lui-même ni abſurdité ni contradiction; puiſqu'en effet on a vu plus haut (*art.* 12) qu'il y a des cas où ce parallèliſme eſt impoſſible, même pour un ſeul rayon d'une même couleur; ſavoir le cas où un priſme eſt placé dans un ſeul & même milieu.

20. On objectera peut-être que comme il y a une équation finale (*art.* 13) entre m, μ, $\frac{dm}{d\mu}$, & sin. $\mathcal{C}$, (pour que les rayons émergens ſoient parallèles aux incidens) on peut, en ſuppoſant m, μ & $\frac{dm}{d\mu}$ donnés, déterminer ſin. $\mathcal{C}$ à être tel qu'il ſatisfaſſe à cette équation; & que par conſéquent il ſera toujours poſſible de faire enſorte que les rayons émergens ſoient parallèles aux incidens. Mais il eſt évident que ſi $\frac{dm}{1-m}$ étoit égal à $\frac{d\mu}{1-\mu}$, ou même $\frac{dm}{1-m} > \frac{d\mu}{1-\mu}$ (m & μ

étant ſuppoſés < 1, & $\mu > m$), l'angle ζ n'auroit point de valeur poſſible, puiſqu'on trouve (*art.* 17 & 18) qu'en ſuppoſant ζ & α des angles réels & poſſibles, $\frac{dm}{1-m}$ eſt $< \frac{d\mu}{1-\mu}$.

21. En effet, ſi on fait $\frac{d\mu}{dm} = k$, l'équation de l'*art.* 13

$$\frac{d\mu - dm}{\mu - m} = \frac{-m\,dm \sin.\zeta^2 - d\mu \cos.\zeta \sqrt{(1 - m^2 \sin.\zeta^2)}}{1 - m^2 \sin.\zeta^2 - \mu \cos.\zeta \sqrt{(1 - m^2 \sin.\zeta^2)}},$$

donnera après les réductions $k^2 - 2k + 1 - \mu^2 + 2km\mu - m^2k^2 = (\sin.\zeta^2)(k^2m^2 + 2\mu m - 2km^2 - k^2m^4 + 2k\mu m^3 - \mu^2 - m^2\mu^2)$; d'où l'on tire $\sin.\zeta^2 = \frac{(k-1)^2 - (km-\mu)^2}{k^2m^2 - \mu^2 - 2m(km-\mu) - (km^2 - m\mu)^2}$; ſuppoſons, par exemple, $\frac{d\mu}{1-\mu} = \frac{dm}{1-m}$, on aura $\frac{k}{1-\mu} = \frac{1}{1-m}$, d'où $k - 1 = km - \mu$, & par conſéquent $\sin.\zeta = 0$; donc on aura auſſi $\alpha = 0$, puiſque tang. $\alpha = \frac{(\mu - m)\sin.\zeta}{\cos.\varsigma - \mu \sin.\zeta}$. Donc ſi $\frac{d\mu}{1-\mu} = \frac{dm}{1-m}$, il faudra, pour le parallèliſme des rayons incidens & émergens, que l'angle du priſme ſoit nul, c'eſt-à-dire, que le milieu *B* ſoit anéanti, & que les rayons tombent perpendiculairement du milieu *A* dans le milieu *C*. [On peut démontrer de même que ſi $\frac{d\mu}{1-\mu}$ eſt $< \frac{dm}{1-m}$, le parallèliſme ſera impoſſible. Voyez ci-après le *Supplément à ces Recherches*].

22. Concluons de tout ce qui précéde, que la dé-

monſtration de M. Klingenſtierna contre la loi de M. Newton n'a lieu que dans une hypothèſe particuliere, qu'on peut lui conteſter; ſavoir dans celle du parallèliſme des rayons émergens aux incidens: & en effet il eſt évident, ce me ſemble, qu'on ne peut démontrer métaphyſiquement & en général que la loi de M. Newton eſt impoſſible, puiſqu'il ſe pourroit qu'il y eût en effet des cas où la nature eût rendu $\frac{dm}{1-m}$ égal à $\frac{d\mu}{1-\mu}$; cette ſuppoſition n'ayant rien en elle-même de choquant ni d'abſurde.

23. C'eſt donc uniquement par l'expérience, & non par la ſimple théorie, qu'on peut détruire l'aſſertion de M. Newton, que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ eſt $=\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$. J'ajouterai que la propoſition de l'*Optique* de ce grand homme, citée dans les Mémoires de l'Académie de 1756, page 384, eſt exactement & même évidemment vraie, ſi *tous* les rayons émergens d'*un même faiſceau*, compoſé des ſept couleurs, ſortent parallèles aux rayons incidens *de ce même faiſceau*; pour lors le faiſceau émergent ſera blanc, comme le dit M. Newton; mais il ne le ſera plus s'il n'y a qu'*un ſeul* des rayons émergens, par ex. le rayon rouge, qui ſoit parallèle au rayon rouge incident. En ce cas, comme l'a obſervé M. Dollond, l'objet ſera coloré. M. Klingenſtierna, qui place ſon priſme entre deux différens milieux, ſuppoſe, comme

M. Newton, que *tous* les rayons d'un faiſceau ſoient parallèles à l'entrée & à la ſortie, d'où réſultera la blancheur. Or cette ſuppoſition pourroit n'avoir pas lieu dans la nature (*art.* 19 *&* 22).

24. Je terminerai ce Mémoire par quelques autres Remarques ſur la loi ſuppoſée par M. Newton, & ſur le théorême de M. Klingenſtierna. Si un rayon paſſe du milieu A dans le milieu B, un pareil rayon du milieu A dans le milieu C, un pareil rayon du milieu A dans le milieu D, &c. M. Newton ſuppoſe, comme nous l'avons déja dit pluſieurs fois, qu'on aura $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ égal à une quantité conſtante, quel que ſoit le ſecond milieu, le milieu A reſtant toujours le même, & $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m'}$ étant les rapports des ſinus d'incidence & de réfraction pour les rayons de la couleur K & ceux de la couleur Q, en paſſant du milieu A dans ce ſecond milieu. On a prétendu qu'il s'enſuivroit de-là que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ devroit être $= \frac{1-m}{1-m'}$, conſéquence dont on a aiſément fait voir la fauſſeté ; mais cette conſéquence n'eſt point une ſuite de la loi ſuppoſée par M. Newton.

25. Car ſi on prend $P = \frac{1}{m}$, pour le rapport des ſinus dans le paſſage du milieu A aux milieux B, C, D,

D, &c. la quantité $\frac{P-1}{P'-1}$ peut être ſuppoſée égale à une conſtante α, ſans que de cette ſuppoſition il réſulte que $\frac{1-m}{1-m'}$ ſoit égal à la même conſtante α; c'eſt-à-dire, que cette même loi ou rapport ait lieu dans le paſſage du milieu B au milieu A, du milieu C au milieu A, du milieu D au milieu A, &c.

26. Il y a plus; de ce que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ eſt $= \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$, non-ſeulement il ne s'enſuit point que $\frac{1-m}{1-m'}$ ſoit $= \frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$; il ne s'enſuit pas même que $\frac{1-m}{1-m'}$ ſoit $= \frac{1-M}{1-M'}$; puiſqu'il faudroit pour cela qu'on eût $\frac{m'}{m} = \frac{M'}{M}$, ce qui n'eſt pas; car $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ ſuppoſé égal à $\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$ donne $\frac{\frac{m'}{m}-m'}{1-m'} = \frac{\frac{M'}{M}-M'}{1-M'}$, & en retranchant l'unité de part & d'autre, $\frac{\frac{m'}{m}-1}{1-m'} = \frac{\frac{M'}{M}-1}{1-M'}$; d'où il eſt clair que ſi $\frac{m'}{m}$ étoit $= \frac{M'}{M}$, on auroit $1-m' = 1-M'$ ou $m' = M'$, & par conſéquent auſſi $m = M$, ce qui n'eſt pas.

27. Par conſéquent de ce que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ eſt ſuppoſé une quantité conſtante, en paſſant d'un milieu *donné & conſtant A*, dans un autre milieu *quelconque & variable B*, il ne s'enſuit ni que $\frac{1-m}{1-m'}$ ſoit égal à la même conſtante, ni même à une autre conſtante quelconque; c'eſt-à-dire, que la loi qui peut s'obſerver dans le paſſage de A à B ne doit pas pour cela s'obſerver de même dans le paſſage de B à A.

28. Mais en même-temps il eſt aiſé de faire voir que ſi dans le paſſage du milieu A aux milieux B, C, D, &c. la loi dont il s'agit eſt obſervée, elle le ſera auſſi dans le paſſage d'un des milieux quelconque B aux autres milieux A, C, D, &c. Nous en avons déja donné la preuve ci-deſſus, *art.* 5. Mais nous allons la préſenter ici d'une maniere plus générale & plus détaillée.

29. En effet le rapport des ſinus, en paſſant du milieu B aux milieux A, C, D, &c. ſera m, $\frac{m}{M}$, $\frac{m}{\mu}$, &c. dans la ſuppoſition que le rapport des ſinus, en paſſant du milieu A dans les milieux B, C, D, &c. ſoit $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{\mu}$. Or de ce que $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ eſt $=$ $\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1} = \frac{\frac{1}{\mu}-1}{\frac{1}{\mu'}-1}$, & de ce que $\frac{1-m}{1-m'} =$

$\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1} \times \frac{m}{m'}$, il s'enſuit que $\frac{1-\frac{m}{M}}{1-\frac{m'}{M'}}$ eſt égal à $\frac{1-m}{1-m'}$. Car puiſque $\frac{\frac{1}{M'}-1}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{m}-1}$, donc $\frac{\frac{m'}{M'}-m'}{1-m'} = \frac{\frac{m}{M}-m}{1-m}$; donc (en retranchant de part & d'autre l'unité, & réduiſant) on aura $\frac{\frac{m'}{M'}-1}{1-m'} = \frac{\frac{m}{M}-1}{1-m}$ ou $\frac{1-\frac{m}{M}}{1-\frac{m'}{M'}} = \frac{1-m}{1-m'}$; & on prouvera de même que $\frac{1-\frac{m}{\mu}}{1-\frac{m'}{\mu'}}$ ſera $= \frac{1-m}{1-m'}$, & ainſi de ſuite pour tant de milieux E, F, &c. qu'on voudra.

30. Donc ſi la quantité $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ eſt conſtante dans le paſſage immédiat d'un milieu donné A à d'autres milieux quelconque B, C, D, &c. la quantité $\frac{1-n}{1-n'}$ ſera auſſi conſtante, n étant le rapport des ſinus dans le paſſage immédiat d'un de ces milieux B aux autres milieux A, C, D, &c.

31. Il faudra ſeulement remarquer que $\frac{1-n}{1-n'}$, quoique conſtant, ne ſera pas égal à la valeur conſtante

α de $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$, mais à cette valeur α multipliée par $\frac{m}{m'}$, c'eſt-à-dire, par le rapport des ſinus dans le paſſage du milieu B au milieu A, pour les rayons de deux différentes couleurs; c'eſt ce qui réſulte de l'équation $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1} \times \frac{m}{m'} = \frac{1-m}{1-m'}$. Cette propoſition a été déja démontrée art. 874 du troiſiéme Volume de nos *Opuſcules Mathématiques*.

32. Si le paſſage ſe faiſoit du milieu C dans les milieux A, B, D, &c. $\frac{1-n}{1-n'}$ ſeroit $= \frac{\alpha M}{M'}$; du milieu D dans les milieux A, B, C, &c. $\frac{1-n}{1-n'}$ ſeroit $= \frac{\alpha m}{m'}$, en ſuppoſant $\frac{1}{m}$ le rapport des ſinus dans le paſſage de A à D, &c. & ainſi du reſte.

33. Donc ſi la loi de M. Newton a lieu dans le paſſage immédiat d'un milieu donné A à tant de milieux qu'on voudra, c'eſt-à-dire, ſi le rapport $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ eſt égal à une conſtante pour tous ces milieux, le rapport analogue $\frac{1-n}{1-n'}$ ſera auſſi égal à une quantité conſtante, différente de la premiere, dans le paſſage immédiat d'un de ces milieux quelconque au milieu A & à

tous les autres ; mais la même loi ou conſtance de rapport n'aura pas lieu dans le paſſage immédiat de ces différens milieux au même milieu *A*.

34. En général, ſi n eſt le rapport des ſinus, en paſſant du milieu d'où vient la Lumiere dans celui où elle entre, la queſtion de l'*art.* 1 ſe réduit à prouver contre M. Newton que $\frac{1-n}{1-n'}$ ou $\frac{n-1}{n'-1}$ n'eſt pas égal à une conſtante, dans le paſſage du milieu *A* aux milieux *B*, *C*, *D*, &c. Or M. Klingenſtierna ſe contente de prouver (ou plutôt ſe propoſe ſimplement de prouver) que $\frac{1-n}{1-n'}$ n'eſt pas conſtant, dans le paſſage du milieu *B* aux milieux *A*, *C*, *D*, &c. ce qui n'eſt pas préciſément la propoſition à prouver. Il eſt bien vrai que de la vérité de cette ſeconde propoſition doit réſulter la vérité de la premiere ; mais il eſt vrai auſſi, ce me ſemble, que M. Klingenſtierna auroit dû démontrer que la premiere réſulte de la ſeconde, ce qu'il n'a point fait, & à quoi nous avons ſuppléé ci-deſſus, *art.* 5 & 29. Il étoit d'autant plus néceſſaire de le démontrer, que quoique dans les deux cas $\frac{1-n}{1-n'}$ ſoit égal à une conſtante, il n'eſt pas égal à la même conſtante (*art.* 31), puiſque ſi dans le premier cas il eſt égal à α, dans le ſecond il l'eſt à $\frac{\alpha m}{m'}$. Or M. Klingenſtierna n'ayant ni donné cette démonſtration, ni fait cette remarque que la valeur conſtante de $\frac{1-n}{1-n'}$ n'eſt pas la même dans les deux cas ;

j'en ai conclu, & peut-être avec quelque raiſon, qu'il avoit ſuppoſé *tacitement* que dans ces deux cas la valeur de $\frac{1-n}{1-n'}$ étoit la même, quoique cette ſuppoſition ne ſuive pas néceſſairement de ſa conſtruction & de ſa démonſtration.

35. Une autre cauſe qui a contribué à me faire juger que M. Klingenſtierna avoit fait la fauſſe ſuppoſition dont il s'agit, c'eſt qu'à la fin de ſa démonſtration il remarque que ſi m & μ different peu de l'unité, $\frac{1-m}{1-m'}$ ſera égal à $\frac{1-\mu}{1-\mu'}$ à très-peu près. Or dans ce cas les rapports $\frac{1-m}{1-m'}$ & $\frac{1-\mu}{1-\mu'}$ ſont égaux à très-peu près à la même conſtante α, que les rapports $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ & $\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$, comme nous l'allons prouver dans un moment. Il étoit donc naturel de croire que M. Klingenſtierna ſuppoſoit en général, que ſi $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ & $\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$ étoient égaux à une conſtante α, $\frac{m-1}{m'-1}$ & $\frac{\frac{m}{M}-1}{\frac{m'}{M'}-1}$ ou $\frac{\mu-1}{\mu'-1}$ devoient auſſi être égaux à la même conſtante α.

36. Quoi qu'il en ſoit, il demeure conſtant, ce me ſemble, par les *art.* 19 & 22, qu'encore que M. Klingenſtierna n'ait pas fait la fauſſe ſuppoſition que j'avois cru, ou du moins que ſa démonſtration n'entraîne pas cette fauſſe ſuppoſition, cependant cette démonſtration ne conclut rien à la rigueur contre la loi ſuppoſée par M. Newton, laquelle ne peut être renverſée que par l'expérience.

37. Si m & m' different très-peu de l'unité, alors a qui eſt $= \frac{\frac{1}{m} - 1}{\frac{1}{m'} - 1}$ ne ſera plus une quantité preſque $= 1$, mais une quantité finie, & $\frac{a\,m'}{m}$ ſera cenſé égal à a, parce que m' & m différent très-peu l'un de l'autre.

38. Et ſi dans ce cas les différences ϵ & ϵ' de m & de m' avec l'unité étoient telles que $\frac{\epsilon}{\epsilon'} = a$ fût encore une quantité fort peu différente de l'unité, alors $\epsilon - \epsilon'$ étant une quantité cenſée infiniment petite du ſecond ordre (puiſque ϵ & ϵ' le ſont du premier, & que $\frac{\epsilon}{\epsilon'}$ eſt ſuppoſé preſque égal à 1), $m - m'$ ſeroit auſſi cenſée infiniment petite du ſecond ordre. Ainſi la différence de a & de $\frac{a\,m'}{m}$ ſeroit cenſée infiniment petite du ſecond ordre, & par conſéquent ces deux quantités pourroient encore être regardées comme égales.

39. Nous avons démontré dans les deux articles pré-

cédens que si $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1} = \alpha$, & que m & M different très-peu de l'unité, ainsi que m' & M', on aura $\frac{m-1}{m'-1}$ & $\frac{\frac{m}{M}-1}{\frac{m'}{M'}-1}$ sensiblement égaux à α. On prouvera de même que dans ce cas $\frac{M-1}{M'-1}$ est aussi sensiblement égal à α. Or de-là il s'ensuit que si $\frac{m-1}{m'-1} = \frac{M-1}{M'-1} = \alpha$, on aura $\frac{\frac{M}{m}-1}{\frac{M'}{m'}-1}$ sensiblement égal à α; car m & m', M & M', $\frac{M}{m}$ & $\frac{M'}{m'}$ font ici absolument le même effet que $\frac{1}{m}$ & $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{M}$ & $\frac{1}{M'}$, $\frac{m}{M}$ & $\frac{m'}{M'}$ dans l'article ci-dessus. Dans l'art. 29 du XLIII Mémoire de nos *Opuscules*, Tome V, pag. 468, nous n'avons démontré cette derniere proposition que dans l'hypothèse que la différence de m & de m', ainsi que de M & de M', soit censée infiniment petite du second ordre. On voit ici que la proposition est encore vraie, quand même $m' - m$ seroit du même ordre que $1 - m$.

40. De-là il est aisé de conclure que si $\frac{1-n}{1-n'}$ est constant & $= \alpha$ dans le passage du milieu A aux milieux

lieux B, C, D, &c. & que n & n' different peu de l'unité, la quantité $\frac{1-n}{1-n'}$ ſera pareillement conſtante & $= \alpha$ dans le paſſage d'un des milieux quelconque, par exemple, D, dans un autre milieu quelconque, par exemple, B. Car on vient de voir que ſi $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ & $\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$ ſont conſtans & égaux à α, & que m & m', ainſi que M & M', different très-peu de l'unité, les quantités $\frac{1-m}{1-m'}$, $\frac{1-M}{1-M'}$, $\frac{\frac{m}{M}-1}{\frac{m'}{M'}-1}$, $\frac{\frac{M}{m}-1}{\frac{M'}{m'}-1}$ ſeront auſſi à très-peu près égales à la conſtante α.

41. J'obſerverai, en finiſſant ce Mémoire, que dans le Tome V de nos Opuſcules, page 471, art. 32, il s'eſt gliſſé une légere mépriſe de calcul, qui n'influe point ſur le fond de notre Théorie. Au lieu de $\frac{P'-1}{P-1} = \frac{Bc\mathcal{A}g+K+\Psi\Delta''-\Psi\Delta'}{Bc\mathcal{A}g'+K+\Psi\Delta''-\Psi\Delta'}$, il faut mettre $\frac{P'-1}{P-1} = \frac{Bc\mathcal{A}g+K+\Psi\Delta'-\Psi\Delta}{Bc\mathcal{A}g'+K+\Psi\Delta'-\Psi\Delta}$; enſorte que le rapport de $P'-1$ à $P-1$, dans le paſſage du milieu B au milieu C, dépend toujours des denſités Δ' & Δ des milieux B & A. Mais il eſt à remarquer que ce rapport eſt conſtant, quel que ſoit le milieu C, ce qui revient à l'*art.* 31 ci-deſſus. Dans le même Volume, p. 467,

art. 28, ligne derniere, au lieu de $\frac{dP}{P-1} = -Adg \times (\Psi\Delta' - \Psi\Delta)$, il faut lire ſimplement $\frac{dP}{P-1} = -Adg$; ce qui ne change d'ailleurs rien au reſte de la Théorie, & ſert même à la confirmer.

SUPPLÉMENT

AUX RECHERCHES PRÉCÉDENTES.

1. LA valeur de $\mu = \frac{\text{sin.}(\varrho + \alpha)}{\text{sin.}(\zeta + \alpha)}$ trouvée *art.* 7 ci-deſſus, donne, lorſque α, ρ & ζ ſont ſuppoſés très-petits, μ égal à très-peu près à $\frac{\varrho + \alpha}{\zeta + \alpha} = \frac{m\zeta + \alpha}{\zeta + \alpha}$; donc $\mu - 1 = \frac{m\zeta - \zeta}{\zeta + \alpha}$, & $d\mu = \frac{\zeta\, dm}{\zeta + \alpha}$, d'où il eſt clair que $\frac{d\mu}{\mu - 1} = \frac{dm}{m - 1}$; ou $\frac{d\mu}{1 - \mu} = \frac{dm}{1 - m}$.

2. Donc lorſque l'angle α du priſme eſt petit, ainſi que l'angle d'incidence ζ, ſi les rayons émergens ſont parallèles aux incidens, on aura $\frac{d\mu}{\mu - 1} = \frac{dm}{m - 1}$.

3. Mais comment accorder cette propoſition avec celle de l'*art.* 18 ci-deſſus, dans laquelle on a démontré en général que ſi les rayons émergens ſont parallèles aux incidens, $\frac{d\mu}{1 - \mu}$ ſera $> \frac{dm}{1 - m}$?

4. Pour réſoudre cette difficulté, il faut remarquer

1°. que l'équation $\frac{dm}{1-m} = \frac{d\mu}{1-\mu}$ qu'on vient de trouver, dans l'hypothèse du parallèlisme des rayons; lorsque α & ζ sont fort petits, n'est point une équation rigoureuse, mais une équation approchée, & dépendante de la supposition qu'au lieu des sinus des petits angles α, & ζ, on mette ces angles mêmes dans la valeur de μ, & l'unité au lieu de leurs cosinus. 2°. Que si dans le calcul de l'*art.* 18, on met au lieu de cos. ζ sa valeur très-approchée $1 - \frac{\zeta^2}{2}$, en supposant ζ très-petit, & au lieu de $\sqrt{(1 - m^2 \text{ sin. } \zeta^2)}$ sa valeur aussi très-approchée $1 - \frac{m^2\zeta^2}{2}$, on aura $\frac{\text{cos. } \zeta - \sqrt{(1 - m^2 \text{ sin. } \zeta^2)}}{\text{sin. } \zeta}$ égal à très-peu près à $\frac{-\zeta^2 + m^2\zeta^2}{2\zeta} = \frac{(m^2-1)\zeta}{2}$; quantité très-petite, & que $\frac{m \text{ tang. } \alpha \text{ sin. } \zeta}{\sqrt{(1 - m^2 \text{ sin. } \zeta^2)}}$ sera à très-peu près $m\alpha\zeta$; ensorte que $\frac{d\mu}{dm}$ sera à $\frac{1-\mu}{1-m}$ comme $(1-m)(1-m\alpha\zeta)$ est à $1 - m + \frac{\alpha(m^2-1)\zeta}{2}$ à très-peu près; c'est-à-dire, comme $1-m$ est à $1-m$ à très-peu près; d'où il s'ensuit que quand α & ζ sont très-petits, on a $\frac{d\mu}{dm}$ égal à très-peu près à $\frac{1-\mu}{1-m}$.

5. On trouveroit le même résultat, en employant la démonstration synthétique de l'*art.* 17. Il faut seulement observer que comme l'angle *IHG* ou α (Fig. 39) qui est l'angle du prisme, doit être fort petit, les lignes *TI* &

TG qui repréſentent m & μ étant finies, & TH repréſentant l'unité, il faut que les arcs TGH, TIH ſoient l'un & l'autre d'un très-petit nombre de degrés, ou ce qui revient au même, ayent des fleches très-petites, & ſoient décrits d'un fort grand rayon; enſorte que les angles THI, THG ſoient très-petits l'un & l'autre, & par conſéquent leur différence IGH qui eſt l'angle α du priſme. Par la même raiſon les angles ITH, GTH ſeront l'un & l'autre très-petits, enſorte que les points L, O, ſeront très-près de H, & très-près l'un de l'autre. Donc en appliquant ici la propoſition démontrée Tome V de nos Opuſcules, p. 469, art. 30, on trouvera que $\frac{LG}{LI} = \frac{lg}{li}$ à très-peu près; d'où réſulte $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1-\mu}{1-m}$ à très-peu près.

6. Ainſi lorſque M. Klingenſtierna a dit que l'égalité $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1-\mu}{1-m}$ pourroit avoir lieu dans de *petites réfractions*, cette propoſition eſt vraie, même dans l'hypothèſe que m & μ different ſenſiblement de l'unité, pourvû que non-ſeulement l'angle ζ d'incidence ſoit fort petit, mais encore l'angle α du priſme. Mais l'aſſertion n'eſt pas vraie, ſi ζ étant fort petit, α reſte fini.

7. Au reſte, il eſt à remarquer que ſi l'angle α eſt fini, ζ étant très-petit, la réfraction en entrant dans le priſme ſera à la vérité fort petite, puiſque ſin. $\rho = m$ ſin. ζ, ce qui donne à très-peu près $\rho = m\zeta$, c'eſt-à-dire, fort petit; mais il n'en ſera pas de même de la

réfraction en ſortant, puiſque l'angle d'incidence $\varphi + \alpha$ & l'angle de réfraction $\zeta + \alpha$ ſeront finis. Si donc on veut que les réfractions ſoient *petites*, en entrant & en ſortant, il faut néceſſairement que α ſoit très-petit. C'eſt ſans doute ce que M. Klingenſtierna a ſuppoſé *tacitement*; mais on voit que ſon aſſertion avoit beſoin d'être expliquée & modifiée. Ainſi la remarque que nous avons faite à ce ſujet, Tome III de nos Opuſc. pag. 360, art. 879, ſubſiſte toujours; ſavoir qu'il ne faut pas confondre le cas où l'angle d'incidence eſt fort petit avec celui où m & m' different peu de l'unité.

8. Il réſulte de l'*art.* 2 de ce Supplément, que ſi $\frac{d\mu}{dm}$ n'eſt pas égal, au moins ſenſiblement, à $\frac{1-\mu}{1-m}$, il n'eſt pas poſſible, en ſuppoſant α & ζ très-petits, que les rayons émergens ſortent *tous* parallèles, dans aucune ſituation, aux rayons incidens parallèles de la même couleur.

9. Or les expériences de M. Dollond prouvent que $\frac{d\mu}{dm}$ n'eſt pas $= \frac{1-\mu}{1-m}$, au moins dans un grand nombre de milieux. Donc dans ces milieux, le parallèliſme des rayons émergens aux incidens eſt impoſſible, au moins en ſuppoſant α & ζ fort petits.

10. Il paroît que M. Newton avoit regardé ce parallèliſme comme évidemment poſſible, & que de-là il en avoit conclu que $\frac{d\mu}{dm}$ étoit $= \frac{1-\mu}{1-m}$. S'il en eût fait l'expérience, ou qu'il l'eût faite avec plus de ſoin,

il auroit reconnu que la ſuppoſition d'où il partoit, toute naturelle qu'elle pouvoit paroître, n'étoit pas conforme à la vérité.

11. La démonſtration de M. Klingenſtierna contre l'aſſertion de M. Newton, a le même défaut que cette aſſertion qu'elle combat; c'eſt de ſuppoſer poſſible dans la nature, un parallèliſme des rayons qui ne peut être conſtaté que par l'expérience. Cette ſuppoſition eſt d'autant plus gratuite qu'on a vu ci-deſſus (*art.* 17), que ſi $\frac{d\mu}{1-\mu}$ eſt $< \frac{dm}{1-m}$, (μ étant $> m$) le parallèliſme eſt impoſſible. Suppoſer donc le parallèliſme poſſible ſans s'appuyer ſur l'expérience, c'eſt réellement ſuppoſer, non-ſeulement que $\frac{d\mu}{1-\mu}$ ne ſauroit être $= \frac{dm}{1-m}$, mais encore que $\frac{d\mu}{1-\mu}$ ne ſauroit être $< \frac{dm}{1-m}$ (μ étant $> m$). Or comment peut-on faire une telle ſuppoſition ſans y être autoriſé par l'expérience?

12. Au reſte, en ſuppoſant même $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1-\mu}{1-m}$, *tous* les rayons émergens ne ſortent parallèles aux incidens de la même couleur & ayant la même incidence, que dans certaines valeurs ou du moins certains rapports de α & ζ. En effet, on a en général pour la condition du parallèliſme, en ſuppoſant α fort petit (*art.* 9)

$\alpha = \frac{1 - \frac{d\mu}{dm}}{\frac{d\mu}{\mathcal{C}dm} + m\mathcal{C}}$ égal à très-peu près à $\frac{\mathcal{C}(dm - d\mu)}{d\mu}$; d'où l'on tire le rapport $\frac{\alpha}{\mathcal{C}} = \frac{dm}{d\mu} - 1$. On a auſſi (*art.* 11.) $\alpha = \frac{(\mu - m)\mathcal{C}}{1 - \mu}$, d'où l'on tire une valeur de $\frac{\alpha}{\mathcal{C}}$, qui s'accorde avec la précédente, en remarquant que (*art.* 13) $\frac{d\mu - dm}{\mu - m} =$ à très-peu près $-\frac{d\mu}{1 - \mu}$, ce qui donne $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1 - \mu}{1 - m}$.

13. Il faut donc que les angles très-petits α & $\mathcal{C}$ ayent un certain rapport dans l'hypothèſe de $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1 - \mu}{1 - m}$, pour le parallèliſme des rayons émergens aux incidens.

14. Dans toute autre hypothèſe ſur le rapport de α à $\mathcal{C}$, α & $\mathcal{C}$ étant ſuppoſés toujours très-petits, on pourra avoir $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1 - \mu}{1 - m}$ ſans que tous les rayons émergens de différente couleur ſortent parallèles aux incidens, l'incidence de ces rayons de différente couleur étant ſuppoſée la même.

15. Puiſque les expériences de M. Dollond prouvent que $\frac{d\mu}{dm}$ n'eſt pas généralement $= \frac{1 - \mu}{1 - m}$ en paſſant d'un milieu connu que j'appelle A, à d'autres milieux B, C, D, E, &c. il s'enſuit (*art.* 30 ci-deſſus) que $\frac{d\mu}{dm}$ ne ſera pas non plus $= \frac{1 - \mu}{1 - m}$ dans le paſſage d'un

d'un de ces milieux quelconque, par exemple, de C, aux autres milieux A, B, D, E, &c.

16. Mais il pourroit ſe faire que dans le paſſage du milieu A à d'autres milieux G, H, L, &c. on eût $\frac{d\mu}{dm} = \frac{1-\mu}{1-m}$; auquel cas on auroit auſſi, p. 275; la même égalité, pour le paſſage d'un de ces milieux quelconque, par exemple, H, aux autres milieux A, G, L, &c.

17. Pour éclaircir davantage ce que nous avons dit ci-deſſus (*art.* 14 des Rech. précéd. pag. 266) pour le cas où la valeur de α eſt négative, on conſidérera 1°. que nous avons ſuppoſé dans nos calculs que le rayon incident AB (Fig. 40) tombe à gauche de la perpendiculaire CB, & que la pointe D du priſme eſt auſſi à gauche de la même perpendiculaire, DB & DE étant les deux côtés du priſme que le rayon AB doit traverſer, enſorte que DE eſt au-deſſous de DB. Si on ſuppoſoit que AB tombât de l'autre côté de CD, tout le reſte demeurant le même, c'eſt-à-dire, que ζ fût négatif, α demeurant poſitif, ρ ſeroit auſſi négatif; & au lieu de $\mu = \frac{\text{ſin.}(\varrho+\alpha)}{\text{ſin.}(\zeta+\alpha)}$, il faudroit ſuppoſer $\mu = \frac{\text{ſin.}(\alpha-\varrho)}{\text{ſin.}(\alpha-\zeta)} = \frac{\text{ſin.}(\varrho-\alpha)}{\text{ſin.}(\zeta-\alpha)}$; donc alors $\text{tang.} - \alpha = \frac{(\mu-m)\,\text{ſin.}\,\zeta}{\text{coſ.}\,\varrho - \mu\,\text{coſ.}\,\zeta}$.

18. De-là on voit que quand on trouve la tangente de α négative, c'eſt une marque que AB tombe de

l'autre côté de CB par rapport à D; c'eſt-à-dire, ici à droite de CD; ou ce qui revient au même, en laiſſant CB & AB invariables, que la pointe D du priſme ſe trouve en d, les deux côtés étant dB & dE; & en effet il eſt aiſé de voir que l'angle α ou BDE devient alors KdL, qui eſt négatif, étant de l'autre côté de la ligne fixe BL. Pour s'en aſſurer, ſuppoſons que le point D s'éloigne à l'infini vers M, enſorte que DE devienne parallèle à BD; c'eſt-à-dire, imaginons que DE tourne autour de E juſqu'à devenir parallèle à BD; alors α ſera $= 0$; continuons enſuite la rotation toujours dans le même ſens, la ligne ED paſſera dans la ſituation EdK, & l'angle α ſera négatif & $= KdL$.

19. On peut d'ailleurs conſidérer, ſans entrer dans cette diſcuſſion ſur la valeur négative de α, que la valeur négative de α, donnée par l'équation tang. $\alpha = \frac{(\mu - m)\ \text{ſin.}\ C}{\text{cof.}\ \varrho - \mu\ \text{cof.}\ C}$, indique ſeulement qu'il falloit donner à α dans les équations du problême un ſigne différent de celui qu'on lui avoit ſuppoſé; c'eſt-à-dire, qu'au lieu de $\mu = \frac{\text{ſin.}\ (\varrho + \alpha)}{\text{ſin.}\ (C + \alpha)}$, il falloit écrire $\mu = \frac{\text{ſin.}\ (\varrho - \alpha)}{\text{ſin.}\ (C - \alpha)}$; ou $\mu = \frac{\text{ſin.}\ (\alpha - \varrho)}{\text{ſin.}\ (\alpha - C)}$; équation qui convient au cas où la pointe d du priſme eſt de l'autre côté de la perpendiculaire CB par rapport au rayon incident AB. Il faut remarquer au reſte que ſi μ eſt $> m$, (μ & m étant plus petits que l'unité) la tangente de α, ſa-

voir $\frac{(\mu - m)\text{ sin. } \zeta}{\text{cos. } \varrho - \mu \text{ cos. } \zeta}$ ſera toujours poſitive ; pour cela il ſuffit de prouver que cos. ρ ou $\sqrt{(1 - m^2 \text{ sin. } \zeta^2)}$ eſt $> \mu$ cos. ζ ou $\mu \sqrt{(1 - \text{sin. } \zeta^2)}$, c'eſt-à dire, (à cauſe de m & de $\mu < 1$) que $1 - \mu^2$ eſt $>$ sin. ζ^2 $(m^2 - \mu^2)$. Or cela eſt évident, puiſque le premier membre eſt poſitif & le ſecond négatif.

20. Si on n'exige le parallèliſme que pour les rayons d'une ſeule couleur, & non pour les autres, on aura ſimplement $\mu = \frac{\text{sin. } (\varrho + \alpha)}{\text{sin. } (\zeta + \alpha)}$, mais non pas la différence $d\mu$ de μ égale à la différence de $\frac{\text{sin. } (\varrho + \alpha)}{\text{sin. } (\zeta + \alpha)}$, en ſuppoſant ζ & α conſtans, & en faiſant varier ρ qui eſt tel que sin. $\rho = m$ sin. ζ, & $d\rho$ cos. ρ égal à dm sin. ζ. En ce cas particulier, on aura tang. α (p. 265) $= \frac{(\mu - m)\text{ sin. } \zeta}{\text{cos. } \varrho - \mu \text{ cos. } \zeta}$, ce qui donnera α, ζ étant ſuppoſé donné ; ou ſi l'on veut que α ſoit donné, on aura tang. $\alpha = \frac{(\mu - m)\text{ sin. } \zeta}{\sqrt{(1 - m^2 \text{ sin. } \zeta^2)} - \mu \sqrt{(1 - \text{sin. } \zeta^2)}}$; & faiſant $\frac{1}{\text{sin. } \zeta^2} = x$, $\frac{\mu - m}{\text{tang. } \alpha} = \sqrt{(x - m^2)} - \mu \sqrt{(x - 1)}$, d'où l'on aura une équation du ſecond degré qui donnera la valeur de x ; & il eſt à remarquer que cette valeur ne doit jamais être ni négative ni plus petite que l'unité, afin que sin. ζ ne ſoit ni imaginaire ni plus grand que l'unité.

21. Suppoſons pour plus de ſimplicité dans le calcul ;

$\mu < m$; & $m < 1$, il eſt aiſé de voir 1°. que le dénominateur de la valeur de α ſera poſitif, puiſque $\sqrt{(1 - m^2 \text{ ſin. } C^2)}$ eſt $> \sqrt{(1 - \text{ſin. } C^2)}$ & à plus forte raiſon $\sqrt{(1 - m^2 \text{ ſin. } C^2)} > \mu \sqrt{(1 - \text{ſin. } C^2)}$; 2°. que le numérateur ſera négatif, enſorte que pour avoir la vraie valeur de α, il faut écrire tang. $\alpha = \frac{(m - \mu) \text{ ſin. } C}{\text{cof. } \varphi - \mu \text{ ſin. } C}$; φ & C étant regardés comme poſitifs. Dans cette hypothèſe il eſt viſible 1°. que tang. α n'aura jamais de valeur infinie; 2°. que ſi $C = 0$, α ſera $= 0$, & que ſi $C = 90°$, tang. $\alpha = \frac{m - \mu}{\sqrt{(1 - \mu^2)}}$; donc puiſque toutes les valeurs de tang. α ſont finies dans cette hypothèſe, ſi on ſuppoſe α tel que tang. α ſoit plus grande que la plus grande de ces valeurs finies, la valeur de ſin. C ſera impoſſible.

22. On voit par cet exemple, qu'il y a des cas où l'équation du ſecond degré en x, indiquée ci-deſſus, ne donne point une valeur poſſible pour ſin. C. C'eſt ce qu'il ſeroit d'ailleurs aiſé de prouver en réſolvant directement cette équation; mais j'abandonne à d'autres ce calcul, qu'il ſuffit d'indiquer, & qui eſt facile.

23. Dans la démonſtration donnée (*art.* 17 *des Rech. précéd.* p. 268) on a ſuppoſé $\mu > m$, & on a trouvé que le parallèliſme des rayons émergens aux incidens exigeoit la condition $\frac{d\mu}{dm} > \frac{1 - \mu}{1 - m}$. Il eſt aiſé de voir par la même démonſtration que ſi μ étoit $< m$,

le parallèliſme exigeroit $\frac{d\mu}{dm} < \frac{1-\mu}{1-m}$; puiſqu'il n'y auroit qu'à mettre alors m à la place de μ, & μ à la place de m. Mais il ne faut pas oublier qu'alors (*art.* 17 de ce *Supplément*, p. 289) l'angle α ſera négatif, ou, ce qui eſt la même choſe, que le rayon incident AB (Fig. 40) devra être ſuppoſé d'un côté de la perpendiculaire CD, & l'angle d du priſme de l'autre côté de la même perpendiculaire.

24. Le parallèliſme des rayons incidens exige donc que $\frac{d\mu}{dm}$ ſoit $> \frac{1-\mu}{1-m}$ ſi μ eſt $> m$, & $< \frac{1-\mu}{1-m}$ ſi μ eſt $< m$. Il ſemble cependant, par la démonſtration analytique de l'*art.* 18, que $\frac{d\mu}{dm}$ doit toujours être dans cette hypothèſe $> \frac{1-\mu}{1-m}$, ſoit que μ ſoit $>$ ou $< m$; car cette condition de $\mu > m$ n'entre point dans la démonſtration dont il s'agit.

25. Pour lever cette difficulté, il faut conſidérer que ſi μ eſt $< m$, on aura tang. α négatif (*art.* 21 de ce *Supplément*, pag. 292); & qu'ainſi $-m(1-m) \times$ ſin. $\mathcal{C}^2$ étant $>$ cof. $\mathcal{C}\sqrt{(1-m^2}$ ſin. $\mathcal{C}^2)$, comme nous l'avons démontré *art.* 18 des *Rech. précéd.* pag. 268, on aura en multipliant de part & d'autre par la quantité (négative) tang. α, $-m(1-m) \times$ ſin. $\mathcal{C}^2$ tang. $\alpha <$ tang. α cof. $\mathcal{C}\sqrt{(1-m^2}$ ſin. $\mathcal{C}^2)$; d'où il eſt aiſé de conclure (en ajoutant de part & d'autre la quantité

poſitive $1 - \mu$) que $\frac{d\mu}{dm}$ ſera $< \frac{1-\mu}{1-m}$. Au reſte, dans la démonſtration de l'*art.* 18 des *Rech. préc.* pag. 268, il ſera bon en général, pour n'être point embarraſſé des cas où ζ ſera négatif, & par conſéquent ſin. ζ négatif, de mettre au lieu de tang. α ſa valeur $\frac{(\mu-m)\text{ ſin. }\zeta}{\text{cof. }\varsigma - \mu\text{ cof. }\zeta}$; & en ſuppoſant $\frac{\mu - m}{\text{cof. }\varsigma - \mu\text{ cof. }\zeta}$ poſitif, la queſtion ſe réduira à prouver que $-m(1-m) \times$ ſin ζ^2 eſt $>$ cof. $\zeta \sqrt{(1 - m^2\text{ ſin. }\zeta^2)}$, comme dans l'article cité; ce ſera le contraire ſi $\frac{\mu - m}{\text{cof. }\varsigma - \mu\text{ cof. }\zeta}$ eſt négatif. Or pour que $\frac{\mu - m}{\text{cof. }\varsigma - \mu\text{ cof. }\zeta}$ ſoit poſitif, il faut que le numérateur & le dénominateur ſoient de même ſigne. Soit donc $\mu > m$, il faudra que cof. ς ſoit $> \mu$ cof. ζ, ou $1 - m^2$ ſin. $\zeta^2 > \mu^2 - \mu^2$ ſin. ζ^2; ou $1 - \mu^2 > (m^2 - \mu^2)$ ſin. ζ^2. Donc ſin. $\zeta^2 \times (\mu^2 - m^2) > \mu^2 - 1$, & ſin. $\zeta^2 > \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 - m^2}$; condition qui doit avoir lieu, ſoit qu'on ait m & $\mu < 1$; ou > 1. Il eſt bon de remarquer encore que la démonſtration donnée *art.* 18 des *Rech. précéd.* pag. 268, ſuppoſe que $1 - m$ ſin. ζ^2 eſt poſitif ainſi que cof. $\zeta \times \sqrt{(1 - m^2\text{ ſin. }\zeta^2)}$; ce qui n'a aucune difficulté quand m eſt < 1; mais nous obſerverons en paſſant que ſi m eſt > 1, il eſt clair que ſin. ζ^2 doit être $< \frac{1}{m^2}$, pour que le rayon pénetre le priſme. Soit donc ſin. $\zeta^2 =$

$\frac{k'}{m^2}$; k' étant $=$ ou $<$ 1, on aura $1 - m$ ſin. $\mathcal{C}^2 =$ $1 - \frac{k'}{m}$ & par conſéquent poſitif, puiſque m eſt $>$ 1 (*hyp.*); à l'égard de cof. $\mathcal{C}$ $\sqrt{(1 - m^2 \text{ ſin. } \mathcal{C}^2)}$; cette quantité ſera évidemment toujours poſitive, puiſque $\mathcal{C}$ eſt poſitif & $< 90°$, & que ſin. $\mathcal{C}^2$ n'eſt pas ſuppoſé $> \frac{1}{m^2}$. Maintenant $\frac{\mu - m}{\text{cof. } \varsigma - \mu \text{ cof. } \mathcal{C}}$ eſt évidemment $=$ $\frac{\mu - m}{\sqrt{(1 - m^2 \text{ ſin. } \mathcal{C}^2)} - \mu \sqrt{(1 - \text{ſin. } \mathcal{C}^2)}}$; & ſuppoſant $m > 1$, cette quantité eſt poſitive, ſi le rapport de μ à m eſt tel que le haut & le bas ſoient de même ſigne.

26. Suppoſons, comme dans la figure 39, $\mu > m$; on aura $1 - \mu < 1 - m$, & par conſéquent $\frac{1-\mu}{1-m} < 1$; donc ſi on a $\frac{d\mu}{dm} < \frac{1-\mu}{1-m}$, on aura à plus forte raiſon $\frac{d\mu}{dm} < 1$; d'où (p. 264, *art.* 9) $k < 1$, & $k - 1$ négatif. Or ſi $\frac{d\mu}{dm}$ eſt $< \frac{1-\mu}{1-m}$, on aura $k - 1 < km - \mu$; & comme les deux quantités $k - 1$ & $km - \mu$ ſont négatives, à cauſe de $k < 1$ & de $m < \mu$ (*hyp.*) on aura donc $(k - 1)^2 > (km - \mu)^2$, par la raiſon que ſi $-a$ eſt $< -b$, on aura $+b < +a$, & $a^2 > b^2$; donc le numérateur $(k - 1)^2 - (km - \mu)^2$ de la valeur de ſin. $\mathcal{C}^2$ (p. 270) ſera poſitif; de plus le dénominateur de cette même valeur, ſavoir $k^2 m^2 - \mu^2 - 2m(km - \mu) = m^2 (km - \mu)^2$

eſt égal à $k^2 m^2 - 2 k m^2 + m^2 - m^2 - \mu^2 + 2 m \mu =$ $m^2 (k m - \mu)^2 = m^2 (k - 1)^2 - m^2 (k m - \mu)^2 +$ $(m - \mu)^2$; d'où il eſt viſible que $(k - 1)^2$ étant $>$ $(k m - \mu)^2$, m étant < 1, & $- (m - \mu)^2$ négatif, le dénominateur de la valeur de $\mathfrak{C}^2$ eſt ou négatif, ou au moins, s'il eſt poſitif, eſt plus petit que le numérateur. Donc la valeur de ſin. $\mathfrak{C}^2$ ſera ou négative, ou > 1; ce qui donne ſin. $\mathfrak{C}$ impoſſible. Donc ſi $\frac{d\mu}{dm}$ eſt $< \frac{1-\mu}{1-m}$, la valeur de ſin. $\mathfrak{C}$ eſt impoſſible, ou ce qui eſt la même choſe, le parallèliſme des rayons émergens & des incidens. Ce qui s'accorde avec l'*art.* 17, p. 268, où l'on a fait voir que dans l'hypothèſe de $\mu > m$, & du parallèliſme des rayons, on a $\frac{d\mu}{dm} > \frac{1-\mu}{1-m}$.

27. Si on ſuppoſoit $\mu < m$, on auroit $\frac{d\mu}{dm} < \frac{1-\mu}{1-m}$ pour le cas du parallèliſme des rayons (pag. 293) & par conſéquent $\frac{d\mu}{dm} > \frac{1-\mu}{1-m}$ pour le cas où ce parallèliſme eſt impoſſible. Pour lors $\frac{1-\mu}{1-m}$ ſera > 1; & par conſéquent $k > 1$; ainſi on aura $k - 1$ poſitif & plus grand que la quantité poſitive $k m - \mu$; & il ſera aiſé de prouver de même que pour lors le numérateur de la valeur de ſin. $\mathfrak{C}^2$ eſt plus grand que le dénominateur, qui pourra même être négatif; & que la valeur de ſin. $\mathfrak{C}^2$ eſt par conſéquent impoſſible.

28.

28. En général, pour que la valeur de ſin. $\mathfrak{C}^2$ ſoit poſſible, il faut 1°. que le numérateur & le dénominateur de cette valeur ſoient tous deux de même ſigne. 2°. Qu'en les ſuppoſant poſitifs, le numérateur ſoit $<$ ou tout au plus $=$ au dénominateur, & qu'en les ſuppoſant négatifs, le numérateur ſoit $>$ ou au moins $=$ au dénominateur. D'où il s'enſuit qu'il faut néceſſairement que $(k-1)^2$ ſoit $<(km-\mu)^2$; car s'il étoit plus grand, le dénominateur ſeroit plus petit que le numérateur. On aura donc, pour que ſin. $\mathfrak{C}^2$ ſoit poſſible, la condition $(km-\mu)^2 > (k-1)^2$, & $(km-\mu)^2 - (k-1)^2 < (km-\mu)^2 m^2 - (k-1)^2 m^2 + (m-\mu)^2$, d'où l'on tire $(km-\mu)^2 - (k-1)^2 < \frac{(m-\mu)^2}{1-m^2}$, en ſuppoſant $m < 1$.

29. Au reſte, il eſt clair par l'équation de l'*art.* 13 des *Rech. préc.* p. 265, & par celle de l'*art.* 21, p. 270, qui en réſulte, que ſi m, μ, dm, $d\mu$ ſont donnés, c'eſt-à-dire, ſi m, μ, k ſont donnés, on aura, lorſque cela ſera poſſible, la valeur de $\mathfrak{C}$ néceſſaire pour le parallèliſme des rayons, & de-là (*art.* 11, p. 265) la valeur de α. Ainſi en ne ſuppoſant pas même α & $\mathfrak{C}$ très-petits, comme ci-deſſus (p. 283 *& ſuiv.*) mais quelconques, il n'y a qu'une certaine valeur déterminée de α & de $\mathfrak{C}$ qui puiſſe produire le parallèliſme des rayons.

30. Nous avons vu ci-deſſus (p. 292, *art.* 23) qu'afin que le parallèliſme ſoit poſſible, dans l'hypothèſe de

$\mu > m$, il faut que $\frac{d\mu}{dm}$ ſoit $> \frac{1-\mu}{1-m}$; ce qui donne $k - 1 > km - \mu$. Nous avons vu de plus (p. 297, *art.* 28) qu'il eſt néceſſaire que $(k-1)^2$ ſoit $< (km-\mu)^2$. D'où il s'enſuit 1°. que $k = \frac{1-\mu+\omega}{1-m}$, ω étant poſitif, & qu'ainſi $k - 1 = \frac{m-\mu+\omega}{1-m}$, & $km - \mu = \frac{m-\mu+m\omega}{1-m}$; on aura donc $(m-\mu+\omega)^2 < (m-\mu+m\omega)^2$, & $2\omega(m-\mu) + \omega^2 < 2m\omega(m-\mu) + m^2\omega^2$ ou $\omega < \frac{(m-\mu)(2m-2)}{1-m^2}$. Ainſi (puiſque ω eſt poſitif) m & μ doivent être tels que $(m-\mu) \times (m-1)$ ſoit poſitif; c'eſt-à-dire, à cauſe de $m - 1$ négatif (*hyp.*) que m doit être $< \mu$; donc ſi m eſt $< \mu$, & $\omega < \frac{2(\mu-m)}{1+m}$, les deux conditions ci-deſſus ſont remplies. Mais il faut de plus (p. 297, *art.* 28) que $(km-\mu)^2 - (k-1)^2$ ſoit $< \frac{(m-\mu)^2}{1-m^2}$, c'eſt-à-dire, que $[\omega^2(m^2-1) + 2\omega(m-\mu) \times (m-1)] : (1-m)^2$ ſoit $< \frac{(m-\mu)^2}{1-m^2}$, c'eſt-à-dire, (en réduiſant) que $\omega^2(-1-m) - 2\omega(m-\mu)$ ſoit $< \frac{(m-\mu)^2}{1+m}$, ou ce qui eſt la même choſe, $\omega^2(-1-m) - 2\omega(m-\mu) < \frac{(\mu-m)^2}{1+m}$. Cette condition doit avoir lieu en même-temps que $\omega < \frac{2(\mu-m)}{1+m}$. Soit

donc $\omega = \frac{2r(\mu-m)}{1+m}$, r étant < 1, il faudra que $\frac{4rr(\mu-m)^2(-1-m)}{(1+m)^2} - \frac{4r(\mu-m)(m-\mu)}{1+m}$ ſoit $< \frac{(\mu-m)^2}{1+m^2}$, c'eſt-à-dire, en réduiſant, que $-4rr+4r$ ſoit < 1, ou $o < 1-4r+4rr = (2r-1)^2$, ce qui eſt toujours vrai, puiſque $(2r-1)^2$ eſt toujours poſitif. Donc ſuppoſant $\mu > m$, & $\omega = \frac{2r(\mu-m)}{1+m}$, r étant < 1, le parallèliſme ſera poſſible. Mais il ne le ſera pas ſi r eſt > 1. D'où l'on voit que le parallèliſme demande à la vérité que ω ſoit poſitif, mais que cependant le parallèliſme ne ſera pas poſſible dans tous les cas où ω ſera poſitif, c'eſt-à-dire, où $\frac{d\mu}{dm}$ ſera $> \frac{1-\mu}{1-m}$, ſi $\frac{dm}{d\mu} - \frac{1-\mu}{1-m}$, ou $\frac{\omega}{1-m}$ eſt $> \frac{2(\mu-m)}{(1+m)(1-m)} = \frac{2(\mu-m)}{1-m^2}$.

31. De ce que $\frac{1-n}{1-n'}$ ſuppoſé conſtant dans le paſſage du milieu A aux milieux B, C, D, E, &c. donne (p. 273) $\frac{1-n}{1-n'}$ variable dans le paſſage des milieux B, C, D, E, &c. au milieu A, il s'enſuit que ſi $\frac{1-n}{1-n'}$ eſt ſuppoſé conſtant dans le paſſage des milieux B, C, D, E, &c. au milieu A, $\frac{1-n}{1-n'}$ ſera variable dans le paſſage du milieu A aux milieux $B, C, D,$

E, &c. En effet, ſi $\frac{1-n}{1-n'}$ étoit conſtant dans ce dernier cas, $\frac{1-n}{1-n'}$ ſeroit variable dans l'autre, ce qui eſt contre l'hypothèſe. Donc &c.

32. C'eſt ce qu'on peut encore prouver autrement, par un raiſonnement analogue à celui de la p. 273, en remarquant que ſi $\frac{1-n}{1-n'}$ eſt conſtant, dans le paſſage par exemple, des milieux B & C au milieu A, on aura $\frac{1-m}{1-m'} = \frac{1-M}{1-M'}$ ou $\frac{\frac{1}{m'}-\frac{m}{m'}}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{\frac{1}{M'}-\frac{M}{M'}}{\frac{1}{M'}-1}$, & en retranchant l'unité de part & d'autre & réduiſant, $\frac{1-\frac{m}{m'}}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{1-\frac{M}{M'}}{\frac{1}{M'}-1}$; or $\frac{1-m}{1-m'}$ ſuppoſé $= \frac{1-M}{1-M'}$, donne encore, ce qui eſt la même choſe, $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1} \times \frac{m}{m'} = \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1} \times \frac{M}{M'}$; donc ſi $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ étoit $= \frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$, on auroit $\frac{m}{m'} = \frac{M}{M'}$; & par conſéquent à cauſe de $\frac{1-\frac{m}{m'}}{\frac{1}{m'}-1} = \frac{1-\frac{M}{M'}}{\frac{1}{M'}-1}$, on auroit $\frac{1}{m'} - 1 = \frac{1}{M'} - 1$; donc on auroit $m' = M'$, & $m = M$;

ce qui n'eſt pas. Donc ſi $\frac{1-m}{1-m'}$ eſt conſtant & $=\frac{1-M}{1-M'}$, $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ ne ſauroit être $=$ à $\frac{\frac{1}{M}-1}{\frac{1}{M'}-1}$. Donc, &c.

33. Ceux qui attachent quelque prix aux raiſonnemens métaphyſiques pourroient peut-être tirer de-là une concluſion contre l'impoſſibilité de la loi $\frac{d\mu}{dm}=\frac{1-\mu}{1-m}$. En effet, diroient-ils, ſi cette loi avoit lieu dans le paſſage du milieu A, par exemple, aux milieux B, C, D, E, $\frac{1-n}{1-n'}$ ſeroit en ce cas égale à une conſtante α; il faudroit donc (attendu l'*uniformité* des loix de la nature) que $\frac{1-n}{1-n'}$ fût égale à la même conſtante α, ou du moins à une autre conſtante, dans le paſſage des milieux B, C, D, E, &c. au milieu A, ce que nous avons démontré être impoſſible. Donc $\frac{1-n}{1-n'}$ ne ſauroit être $=\alpha$.

34. C'eſt vraiſemblablement d'après un raiſonnement pareil, que de grands Géometres ont cru que $\frac{1-n}{1-n'}$ ne pouvoit être ſuppoſé égale à une conſtante α dans le paſſage d'un milieu A à d'autres milieux B, C, D, &c. ſans que $\frac{1-n}{1-n'}$ fût égale à la même conſtante α dans

le paſſage d'un milieu quelconque dans un autre milieu quelconque.

35. Mais il eſt aiſé de voir combien de pareils raiſonnemens ſont peu concluans. Nous ne connoiſſons pas aſſez en quoi conſiſte la véritable *uniformité* des loix de la nature, pour avancer que $\frac{1-n}{1-n'}$ doive dans tous les cas être égale à une quantité conſtante. Il en ſeroit à peu près de ce raiſonnement, comme de celui qu'avoit fait un grand Géometre pour déterminer l'équation entre n & n', raiſonnement fondé auſſi ſur l'uniformité des loix de la nature, & dont néanmoins l'inſuffiſance eſt aſſez bien prouvée dans les Mém. de l'Acad. de 1756, pag. 403 & ſuiv. On peut obſerver en paſſant, que ce raiſonnement, fondé ſur l'uniformité des loix de la nature, donnoit une loi de réfraction toute différente & même oppoſée à celle de $\frac{\frac{1}{m}-1}{\frac{1}{m'}-1}$ égale à une conſtante α. Ce qui ſuffiroit pour faire voir combien la prétendue *uniformité* dont il s'agit peut nous induire en erreur, puiſqu'en s'appuyant ſur ce principe, on pourroit aſſigner des loix de réfraction toutes différentes les unes des autres, & toutes également vraiſemblables.

36. Dans toutes les Recherches précédentes, nous avons ſuppoſé m & $\mu < 1$, excepté à la fin de la pag. 294, où nous avons dit un mot du cas de $m > 1$. Nous

ne nous étendrons point ici ſur le cas où m & μ ſeroient, ou tous deux, ou l'un des deux, plus grands que l'unité. On voit aſſez par tout ce qui précéde, de quelle maniere on trouvera les conditions de parallèliſme qui peuvent appartenir à ces cas. Il ſera de même aiſé de voir, dans l'*hyp.* de m & $\mu < 1$ & de $m > \mu$, les changemens qu'il faudroit faire aux propoſitions démontrées précédemment pour le cas de $\mu > m$. Nous avons indiqué quelques-uns de ces changemens, le Lecteur trouvera aiſément le reſte de lui-même.

L. MÉMOIRE.

Sur quelques points d'Aſtronomie Phyſique.

§. I.

Sur l'Orbite des Cometes.

1. J'Ai donné dans le Tome II de mes *Opuſcules*; (12 Mém. §. XI & ſuiv.) une méthode très-ſimple, quoiqu'aſſez ſingulière, pour ſimplifier conſidérablement le calcul dans les parties ſupérieures de l'Orbite d'une Comete. On peut employer une méthode analogue pour calculer les perturbations de la Comete dans les cas où l'une des Planetes, Jupiter, par exemple, eſt fort près d'elle. Car ſoit J la maſſe de Jupiter, S celle du Soleil, x la diſtance de la Comete au Soleil, ξ celle de Jupiter à la Comete, & ſuppoſons que la diſtance ξ de la Comete à Jupiter, ſoit ſi petite, que la force

force perturbatrice $\frac{J}{\xi^2}$ ſoit très-grande par rapport à la force centrale $\frac{S}{x^2}$ de la Comete, en ce cas il n'y aura qu'à prendre la Comete pour un ſatellite de Jupiter, au moins pendant un certain temps qu'elle n'en eſt pas fort éloignée ; & pour lors la force perturbatrice ſera de l'ordre de $\frac{S\xi}{x^3}$, & la force centrale de l'ordre de $\frac{J}{\xi^2}$; enſorte que ſi dans le premier cas $\frac{J}{\xi^2} : \frac{S}{x^2} :: \lambda : 1$, λ étant un nombre très-grand, on aura dans le ſecond $\frac{S\xi}{x^3} : \frac{J}{\xi^2} :: \frac{S}{x^2} \times \frac{1}{x} : \frac{J}{\xi^2} \times \frac{1}{\xi} :: \frac{1}{x} \cdot \frac{\lambda}{\xi} :: \xi : \lambda x$; & comme ξ eſt ſuppoſé très-petit par rapport à x, & λ très-grand, on voit que la force perturbatrice ſera ici très-petite par rapport à la force centrale. On pourra donc alors trouver le mouvement de la Comete par les méthodes connues, en la regardant dans les cas dont il s'agit, comme un ſatellite de Jupiter.

2. On remarquera de plus que dans ces cas-là, l'action de Saturne ſur la Comete ſera très-peu conſidérable, puiſqu'il faudra tranſporter à la Comete en ſens contraire l'action de Saturne ſur Jupiter, laquelle eſt preſque égale & parallèle à l'action de Saturne ſur la même Comete, puiſque (*hyp.*) Jupiter eſt très-près de la Comete. De maniere que nommant ζ la diſtance de Jupiter à Saturne, la force perturbatrice qui dans la ſolution ordinaire ſeroit de l'ordre de $\frac{\sigma}{\zeta^2}$, en appellant σ

la masse de Saturne, seroit ici de l'ordre de $\frac{\sigma\xi}{\zeta^3}$, & par conséquent beaucoup plus petite que $\frac{\sigma}{\zeta^2}$, & très-petite par rapport à la force centrale $\frac{J}{\xi^2}$.

3. Il en sera à peu près de même de l'action de Saturne sur le Soleil, qui doit être transportée à Jupiter & à la Comete en sens contraire; d'où il résultera encore pour la Comete une très-petite force perturbatrice.

4. On voit donc comment on pourra abréger & simplifier beaucoup, dans le cas dont il s'agit, la Recherche du mouvement de la Comete, altéré non-seulement par Jupiter, mais encore par Saturne. Mais pour lors il faudra avoir égard dans l'orbite de Jupiter aux perturbations que Saturne y cause; ce qui n'augmentera pas le calcul, puisqu'on suppose que ces perturbations sont déja calculées, & que la théorie & les observations les font suffisamment connoître, au moins pour l'objet dont il s'agit ici.

5. De-là il résulte que les deux méthodes pour trouver l'altération du mouvement des Cometes se servent pour ainsi dire de supplément l'une à l'autre, la méthode ordinaire étant plus exacte lorsque Jupiter n'est pas fort près de la Comete, & la méthode que nous proposons ici étant au contraire plus exacte, à mesure que Jupiter est plus proche de la Comete.

6. Il faut avouer cependant que cette derniere méthode est bornée à des limites qu'elle ne peut passer. En

effet, le rapport de la force perturbatrice $\frac{J}{\xi^2}$ à la force centrale $\frac{S}{x^2}$ eſt, dans la méthode ordinaire, $\frac{Jx^2}{S\xi^2}$; dans la ſeconde méthode, c'eſt-à-dire, dans celle de l'*art.* 1, le rapport de la force perturbatrice $\frac{S\xi}{x^3}$ à la force centrale $\frac{J}{\xi^2}$ eſt $\frac{S\xi^3}{Jx^3}$; ces deux rapports ſont entr'eux comme J^2x^5 à $S^2\xi^5$, de maniere qu'ils ſont égaux ſi $J^2x^5 = S^2\xi^5$, ou ſi on a $5 \log. \left(\frac{x}{\xi}\right) = 2 \log. \frac{S}{J}$. Or $\frac{J}{S}$ = à peu près $\frac{1}{1000}$; donc $2 \log. \frac{S}{J} = 6$; donc $\log. \frac{x}{\xi} = \frac{6}{5}$; ce qui donne $\log. \frac{x}{\xi} = 1.20000$, & $\frac{x}{\xi} = 16$ à peu près. Donc quand $\frac{x}{\xi} = 16$, on a dans les deux méthodes à peu près le même rapport des forces perturbatrices à la force centrale; de ſorte qu'une des deux méthodes n'a pour lors aucun avantage ſur l'autre. Or dans ce cas de $\frac{x}{\xi} = 16$, on a $\frac{Jx^2}{S\xi^2}$ = à peu près $\frac{8^2 \cdot 2^2}{1000}$ = à peu près $\frac{256}{1000}$, quantité qui n'eſt pas très-petite. Ainſi les deux méthodes ont pour lors cet inconvénient, que la force perturbatrice n'eſt pas très-petite par rapport à la force centrale principale. C'eſt ce qu'on va mieux voir encore dans l'article ſuivant.

7. Comme la force perturbatrice, dans le second des deux cas que nous venons de comparer, est plus exactement $\frac{2S\xi}{x^3}$ (*Opusc.* Tom. II, pag. 109), au moins dans la direction du rayon qui va de la Comete à Jupiter, nous supposerons, pour faire la comparaison des deux cas plus exactement & plus généralement tout-à-la-fois, que $\frac{J}{S}$ soit $= \frac{1}{p}$, & que $\frac{Jx^2}{S\xi^2}$ soit à $\frac{2S\xi^3}{Jx^3}$ ou plus généralement $\frac{Jx^2}{S\xi^2}$ à $\frac{mS\xi^3}{Jx^3} :: \frac{x^5}{p^2} : m\xi^5$; de sorte que dans le cas d'égalité des deux rapports, on aura $5 \log. \frac{x}{\xi} = 2 \log. p + \log. m$; & dans ce cas le log. de $\frac{Jx^2}{S\xi^2} = 2 \log. \frac{x}{\xi} - \log. p = \frac{4 \log. p}{5} + \frac{2 \log. m}{5} - \log. p = \frac{2 \log. m - \log. p}{5}$. Or soit dans la théorie de Jupiter $m = 2$, & $p = 1000$, on aura logar. $m = 0.3010300$, & $\frac{2 \log. m - \log. p}{5} = \frac{2.3979400}{5} = - 0.4795880$; d'où $\frac{Jx^2}{S\xi^2}$ = environ $\frac{1}{3}$, quantité qui n'est pas très-petite. Dans la théorie de Saturne on a aussi $m = 2$, & $p = 3000$ environ; d'où logar. $p = 3.4771213$, & $\frac{2 \log. m - \log. p}{5} = \frac{2.8750613}{5} = - 0.5750122$; donc $\frac{Jx^2}{S\xi^2}$ = à peu près $\frac{100}{376}$, quantité qui n'est pas non plus très-petite.

Ainſi dans le cas où aucune des deux méthodes n'a de l'avantage ſur l'autre, elles ont l'une & l'autre l'inconvénient de donner une force perturbatrice très-comparable à la force centrale.

8. Cet inconvénient n'a pas lieu dans la méthode que nous avons donnée, Tome II *Opuſc.* pag. 109, pour les parties ſupérieures de l'orbite, parce que la force perturbatrice y eſt toujours beaucoup plus petite que la force centrale, comme il eſt aiſé de le voir par la Théorie expoſée dans l'endroit cité.

9. De plus, dans le cas dont il s'agit, où ξ eſt très-petit, x doit être fort grand par rapport à ξ, enſorte que la diſtance x de la Comete au Soleil doit être à peu près égale à la diſtance de Jupiter au Soleil; or nous avons fait voir dans le Tome II de nos *Opuſcules*, pag. 114, que lorſque la Comete eſt à une diſtance du Soleil égale, ou à peu près, à la diſtance de Jupiter au Soleil, on peut ſubſtituer à la Comete un ſatellite fictif, dont le mouvement eſt beaucoup plus aiſé à calculer. Or quand Jupiter eſt ſuppoſé fort près de la Comete, il l'eſt auſſi de ce ſatellite fictif. Ainſi on peut dans ce cas appliquer aiſément à ce ſatellite fictif, la méthode que nous venons de donner ici pour la Comete même, dans le cas où elle ſeroit fort proche de Jupiter. Ce que nous n'expliquerons pas ici plus au long. Voy. *l'Appendice à la fin de ce Volume.*

10. Lorſque Jupiter eſt à une telle diſtance de la Comete, que les forces perturbatrices dans les deux mé-

thodes ne ſont pas très-petites par rapport à la force centrale, alors le problême des perturbations devient beaucoup plus difficile, & ce cas me paroît ſur-tout mériter toute l'attention des Géometres. *Voyez ibid.*

11. On pourroit employer une méthode analogue dans des cas ſemblables. Par exemple, on ſait que la force perturbatrice $\frac{S\xi}{x^3}$ de la Lune eſt à ſa force centrale $\frac{T+L}{\xi^2}$ à peu près comme 1 eſt à 180. Or ſi la Lune étoit à une diſtance de la Terre $= n'\xi$, la force perturbatrice ſeroit à la force centrale :: 1 : $\frac{180}{n'^3}$. De maniere que ſi, par exemple, n' étoit $= 6$, la force perturbatrice ſeroit plus grande que la force centrale. Mais alors, au lieu de conſidérer la Lune comme un ſatellite de la Terre, il faudroit la conſidérer comme une Planete qui décriroit une orbite autour du Soleil; la force centrale ſeroit à très-peu près $\frac{S}{x^2}$, & la force perturbatrice $\frac{T}{n'^2\xi^2}$: or puiſque $\frac{Sn'\xi}{x^3} : \frac{T}{n'^2\xi^2} :: 1 : \frac{180}{n'^3}$; donc $\frac{T}{n'^2\xi^2} : \frac{S}{x^2} :: 1 : \frac{180}{n'^3} \times \frac{x}{n'\xi}$: or $\frac{x}{\xi}$ $=$ environ 360, comme le prouvent les obſervations; donc ſi on ſuppoſoit, par exemple, $n = 6$, le rapport de la force perturbatrice $\frac{T}{n'^2\xi^2}$ à la force centrale $\frac{S}{x^2}$ ſeroit celui de $\frac{180}{n'^2}$ à 360, ou de 1 à 72. On pour-

roit donc alors conſidérer la Lune comme décrivant une orbite autour du Soleil, en vertu de la force centrale $\frac{S}{x^2}$, altérée par une force perturbatrice $\frac{T}{n'^2 \xi^2}$ conſidérablement plus petite que cette force centrale. On peut remarquer encore que les rapports des forces perturbatrices aux forces centrales étant dans les deux méthodes $\frac{n'^3}{180}$ & $\frac{1}{2n'^2}$, ces deux rapports ſeroient égaux lorſque n'^5 ſeroit $= 90$, ou log. $n' = \frac{1 + \log. 9}{5}$, d'où l'on tire $n' =$ environ $\frac{246}{100}$. On doit obſerver enfin, que dans ce cas les deux forces perturbatrices ne ſeroient pas très-grandes par rapport à la force centrale, puiſque $\frac{1}{2n'^2}$ ſeroit à peu près $= \frac{4}{2.25} = \frac{2}{25}$; & on pourroit employer à volonté l'une ou l'autre des deux méthodes. D'où il réſulte que ſi n' eſt $< \frac{246}{100}$, il faudra employer celle où l'on conſidere la Lune comme ſatellite de la Terre, & que ſi $n' > \frac{246}{100}$, il faudra employer celle où l'on conſidéreroit la Lune comme décrivant une orbite autour du Soleil. *Voy. l'Appendice.*

§. II.

Des Perturbations d'une Planete principale par ſes ſatellites, & de l'orbite même de ces ſatellites.

1. J'ai démontré dans mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, Tome II, art. 199, que le centre de gra-

vité commun d'une Planete & de ſes ſatellites décrit très-ſenſiblement une ellipſe autour du Soleil. De-là il eſt facile, comme je l'ai remarqué *art.* 218 du même Ouvrage, de trouver le lieu de la Planete principale. Car on a d'abord, comme je l'ai remarqué à l'endroit cité, l'ellipſe que décrit le centre de gravité commun, & par conſéquent le lieu de ce centre de gravité dans un temps donné. On a de plus, ou l'on ſuppoſe qu'on a par la théorie des ſatellites, leur mouvement par rapport à la Planete principale, & par conſéquent leur lieu par rapport à cette Planete dans un temps donné; donc, &c.

2. Imaginons donc, lorſque le temps $t = 0$, un plan paſſant par la Planete principale, & auquel on rapporte le mouvement des ſatellites. Au bout du temps t, on connoîtra les diſtances x, x', &c. des ſatellites S, S', &c. à ce plan, abſtraction faite du mouvement de la Planete. Or au bout de ce temps t, ſuppoſons que la Planete ſe ſoit élevée au-deſſus de ce plan primitif de la quantité ξ; les diſtances x, x', des ſatellites au plan primitif, deviendront $x + \xi$, $x' + \xi$, &c. Enfin comme on connoît l'ellipſe décrite par le centre de gravité, on aura au bout du temps t la diſtance ζ du centre de gravité à ce plan primitif. Donc appellant P la maſſe de la Planete principale, on aura par la propriété du centre de gravité ($P + S + S'$, &c.) $\zeta = S(x + \xi) + S'(x' + \xi)$, &c. $+ P\xi$. D'où l'on tirera ξ.

3. Si on imagine deux autres plans perpendiculaires au plan primitif, on trouvera de même, & par une méthode

méthode ſemblable, la poſition de la Planete principale au bout du temps t par rapport à chacun de ces plans.

4. Lorſque le centre de gravité commun eſt fort près de la Planete principale, c'eſt-à-dire, lorſque la maſſe totale des ſatellites eſt fort petite par rapport à celle de la Planete principale, on peut abréger & ſimplifier cette méthode, en rapportant les mouvemens de la Planete & de ſes ſatellites à l'orbite ſenſiblement plane décrite par le centre de gravité; par la raiſon que le mouvement des ſatellites par rapport au centre de gravité eſt alors à très-peu près connu, étant ſenſiblement le même que le mouvement connu de ces ſatellites par rapport à la Planete principale. Mais la méthode que nous venons de donner eſt plus générale & plus exacte, puiſqu'elle peut être employée lors même que la maſſe des ſatellites eſt comparable à celle de la Planete principale.

5. Il eſt vrai que quand la maſſe des ſatellites eſt comparable à celle de la Planete principale, le mouvement des ſatellites par rapport à cette Planete eſt beaucoup plus difficile à déterminer, les forces perturbatrices étant alors beaucoup plus grandes. Mais 1°. on ſuppoſe que dans tous les cas ce mouvement ſoit connu. 2°. cette difficulté n'auroit pas lieu s'il n'y avoit qu'un ſatellite, & que ce ſatellite fût comparable à la Planete principale. Car la force centrale de la Lune, par exemple, étant $\frac{T+L}{\xi^2}$, & la force perturbatrice étant $\frac{S\xi}{x^3}$,

le rapport de cette force à la force centrale eſt environ $\frac{1}{178}$, quelle que ſoit la maſſe T par rapport à la maſſe L, & l'orbite décrite par la Lune L autour de la Terre ſeroit toujours ſenſiblement circulaire; mais l'orbite de la Lune par rapport au centre de gravité commun de la Lune & de la Terre, ſeroit fort différente de ſon orbite par rapport à la Terre.

6. On peut remarquer cependant que lorſqu'il n'y a qu'un ſatellite, l'orbite décrite par ce ſatellite autour du centre de gravité commun, eſt à très-peu près ſemblable à celle du ſatellite autour de la Planete principale. Ainſi pour lors le problême peut ſe ſimplifier encore, & on peut déterminer les altérations de l'orbite de la Planete principale, en employant la méthode indiquée dans l'*art.* 4. J'ajouterai que lorſque les maſſes du ſatellite & de la Planete ſont comparables l'une à l'autre, il paroît alors plus exact de déterminer le mouvement du ſatellite & de la Planete par rapport à l'orbite du centre de gravité, que le mouvement du ſatellite par rapport à la Planete principale; le calcul ne ſera pas plus difficile ni plus compliqué, les forces perturbatrices étant à peu près les mêmes dans les deux cas; l'avantage d'employer ici l'orbite du centre de gravité, conſiſte en ce que cette orbite eſt plus exactement elliptique que celle de la Planete.

7. Je crois devoir à cette occaſion donner les forces perturbatrices de l'orbite décrite par le centre de gravité commun de la Terre & de la Lune, plus exacte-

ment que je ne l'ai fait dans l'art. 198 de mes *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, Tome II, & ſi l'on veut en ne ſuppoſant point L très-petit par rapport à T. Soit ξ la diſtance de la Lune à la Terre, la diſtance du centre de gravité commun à la Terre ſera $\frac{L\xi}{L+T}$; & ſa diſtance à la Lune $\frac{T\xi}{T+L}$; on a vu dans l'endroit cité que les forces perturbatrices de l'ordre de $\frac{S\xi}{x^3}$, ſe détruiſent mutuellement, enſorte qu'il ne reſte que les forces perturbatrices de l'ordre de $\frac{S}{x^4} \times \left(\frac{T^2\xi^2 \times L}{(T+L)^3} + \frac{L^2\xi^2 . T}{(T+L)^3}\right) = \frac{S.L.T\xi^2}{x^4(T+L)^2} = \frac{S}{x^2} \times \frac{L\xi^2}{Tx^2}$, en ſuppoſant L très-petit par rapport à T.

8. On voit donc que cette force perturbatrice eſt exceſſivement petite, puiſque $\frac{L}{T}$ eſt à peu près $= \frac{1}{80}$; & que $\frac{\xi}{x}$ eſt à peu près $= \frac{1}{360}$. On verra de plus aiſément, en ſuppoſant $x = B + t$, & en regardant t comme très-petit, que cette force perturbatrice doit produire un mouvement d'aphélie de l'ordre de $\frac{S.L\xi^2}{B^3.T}$ diviſé par $\frac{S}{B^3}$, c'eſt-à-dire, de l'ordre de $\frac{L\xi^2}{T.B^2}$, ou du même ordre que le rapport de la force perturbatrice à la force centrale.

9. Outre cette force perturbatrice, il y en a encore

une autre, cauſée par l'action de la Terre & de la Lune ſur le Soleil, laquelle doit être tranſportée en ſens contraire au centre de gravité commun de la Terre & de la Lune, comme nous l'avons obſervé *art.* 198 de l'Ouvrage cité. Mais 1°. de cette force perturbatrice, la partie qui ſeroit de l'ordre de $\frac{L.T\xi}{x^3(T+L)}$, & celle de l'ordre de $\frac{T.L\xi}{x^3(T+L)}$ ſe détruiront mutuellement, comme il eſt aiſé de le voir. 2°. La force perturbatrice reſtante, dont une partie ſeroit de l'ordre de $\frac{T}{x^4} \times \frac{L^2\xi^2}{(L+T)^2}$, & l'autre de l'ordre de $\frac{L}{x^4} \times \frac{T^2\xi^2}{(L+T)^2}$, & par conſéquent beaucoup plus grande, ſeroit d'un ordre beaucoup plus petit que la force perturbatrice $\frac{S.LT\xi^2}{x^4(T+L)^2}$, trouvée *art.* 7, puiſque ces deux forces ſont entr'elles comme T à S. Ainſi on peut n'avoir aucun égard à la force perturbatrice dont il s'agit.

10. Si on conſidere l'orbite que la Lune, ou en général un ſatellite quelconque, décrit autour du Soleil, & qu'on cherche le mouvement du ſatellite dans cette orbite, le temps moyen doit y être égal au temps moyen de la Planete principale. Car ſi les deux temps n'étoient pas exactement égaux, en ce cas, quelque petite que fût leur différence, le ſatellite, au bout d'un certain nombre d'années plus ou moins long, ſe trouveroit éloigné de la Planete principale de toute l'étendue du diametre

de l'orbite de cette Planete ou à très-peu près. Or (*hyp.*) le ſatellite reſte toujours à une diſtance de la Planete principale beaucoup moindre que le diametre de cette orbite. Donc, &c.

11. Si dans cette derniere hypothèſe, la Planete & ſon ſatellite avoient l'un & l'autre très-peu de maſſe, enſorte que cette maſſe pût être regardée comme nulle quant à l'attraction qu'elle exerceroit, on auroit aiſément le mouvement abſolu de chacune des deux Planetes autour du Soleil, qui ſeroit dans une ellipſe; on auroit donc le mouvement réciproque du ſatellite & de la Planete, l'un par rapport à l'autre; mouvement qui ſeroit peut-être très-difficile à trouver directement, parce que dans ce cas la force d'attraction de la Planete ſur ſon ſatellite étant nulle ou comme nulle, il ne reſteroit qu'une force de l'ordre $\frac{2S\xi}{x^3}$ dans la direction du rayon vecteur, & une force de l'ordre $\frac{S\xi}{x^3}$ perpendiculaire à ce même rayon.

12. On pourroit employer une méthode ſemblable pour trouver le mouvement du ſatellite par rapport à la Planete principale, dans la ſuppoſition même que l'on eût égard à l'attraction réciproque de la Planete & de ſon ſatellite, pourvû que cette attraction fût très-petite par rapport à la force attractive du Soleil ſur l'un & ſur l'autre.

13. Si on fait abſtraction de l'action réciproque d'une Planete & de ſon ſatellite, il eſt néceſſaire, pour que

les mouvemens moyens autour du Soleil ſoient égaux, que le grand axe des deux ellipſes ſoit exactement le même de part & d'autre; car on ſait que cette condition de l'égalité des grands axes eſt néceſſaire pour que les temps périodiques ſoient égaux. Or dans cette hypothèſe ſoit a le demi-grand axe des deux ellipſes, e, e' leurs excentricités, z, z' les angles décrits autour du Soleil, on aura $\frac{aa-ee}{a-e\cos. z}$ & $\frac{aa-e'e'}{a-e\cos. z'}$ pour les rayons vecteurs, & on trouvera aiſément la poſition reſpective & la diſtance mutuelle de la Planete & de ſon ſatellite à chaque inſtant.

14. Soit pour plus de ſimplicité $e' = 0$, c'eſt-à-dire, ſuppoſons que la Planete principale décrive un cercle autour du Soleil; en ce cas la différence des rayons correſpondans au même angle z ſera à très-peu près $e\cos. z$, en regardant e comme très-petit; & la différence des angles qui répondent à des temps égaux dans l'orbite de la Planete & dans celle de ſon ſatellite ſera à très-peu près $2e\sin. z$, comme il eſt aiſé de le prouver. Donc la diſtance de la Planete & de ſon ſatellite ſera à très-peu près $\sqrt{[e^2\cos. z^2 + (2e\sin. z)^2]} = \sqrt{(e^2 + 3e^2\sin. z^2)}$, quantité qui n'eſt pas conſtante, & qui eſt un *maximum* quand $\sin. z = \pm 1$, & un *minimum* quand $\sin. z = 0$.

15. L'orbite du ſatellite autour de la Planete principale eſt alors facile à déterminer; en effet, ſoient x' & y' les coordonnées de cette orbite, priſes de la Planete

principale; on aura $x'x' + y'y' = ee(1 + 3 \text{ sin. } z^2)$. Or ſoit ζ' l'angle compris entre le rayon vecteur & la ligne des x', on aura 1°. $\frac{y'}{x'} = \text{tang. } \zeta'$. 2°. On aura, comme il eſt très-aiſé de le prouver, $\frac{2e \text{ sin. } z}{e \text{ cos. } z} = \frac{y'}{x'} = \text{tang. } \zeta'$, & par conſéquent tang. $z = \frac{\text{tang. } \zeta'}{2} = \frac{y'}{2x'}$. Donc puiſque sin. $z^2 = \frac{\text{tang. } z^2}{1 + \text{tang. } z^2}$, on aura $x'x' + y'y' = ee\left(1 + \frac{y'^2}{4x'x' + y'y'}\right)$ ou $(y'y' + x'x') \times (y'y' + 4x'x') = ee(4x'x' + 2y'y')$. Et ſi on veut avoir l'équation par les coordonnées polaires, on nommera ρ le rayon vecteur, & on aura $\rho\rho = ee\left(1 + \frac{\text{tang. } \zeta'^2}{4 + \text{tang. } \zeta'^2}\right)$.

16. Dans ce même cas, ſoient g & g' les vîteſſes initiales, & r, r' les rayons vecteurs autour du Soleil, on a $gg = \frac{2S}{r} - \frac{S}{a}$, & $g'g' = \frac{2S}{r'} - \frac{S}{a}$; d'où il s'enſuit que $gg - g'g'$ doit être exactement égal à $2S\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$. Et par conſéquent cette équation doit avoir lieu en prenant g, g' pour les vîteſſes de projection, & r, r' pour les valeurs initiales des rayons vecteurs.

17. Faiſant toujours abſtraction de l'action réciproque de la Planete & de ſon ſatellite, ſi les grands axes des deux ellipſes different d'une quantité α, quelque

petite qu'elle ſoit, alors le ſatellite ceſſera de l'être, & ſa diſtance à la Planete pourra augmenter juſqu'à $2a$ ou à peu près; enſorte que la diſtance des deux Planetes, qui, lorſque $a = 0$, ne ſauroit paſſer $2e$, puiſqu'elle eſt $= \sqrt{(e^2 + 3ee \text{ ſin. } z^2)}$, peut & doit augmenter conſidérablement pour peu qu'on donne quelque valeur à a; eſpéce de paradoxe aſſez remarquable.

18. Si on cherchoit directement l'orbite de la Lune autour du Soleil, on trouveroit que la force perturbatrice $\frac{T}{\xi^2}$ ſeroit à la force centrale $\frac{S}{x^2} :: \frac{T}{\xi^2} : \frac{S\xi}{x^3} \times \frac{x}{\xi} :: 1 : \frac{n^2 x}{\xi}$; or on a $\frac{\xi}{x} = \frac{1}{300}$ à peu près, c'eſt-à-dire, environ la moitié de 180, & $n^2 =$ à peu près $\frac{1}{180}$; d'où l'on voit que $\frac{T}{\xi^2} : \frac{S}{x^2}$ à peu près comme 2 à 1; & qu'ainſi la force perturbatrice étant plus grande que la force centrale, cette méthode donneroit peu exactement le mouvement de la Lune. Cependant il faut obſerver d'un autre côté, que l'orbite décrite par la Lune differe peu d'une ellipſe, ce qui eſt évident, puiſqu'il n'y a de différence entre le rayon de cette ellipſe & le rayon de la Terre qu'une quantité de l'ordre de ξ, c'eſt-à-dire, de $\frac{1}{300}$, & par conſéquent d'un ordre fort au-deſſous de celui de l'excentricité de l'orbite de la Terre, laquelle eſt $\frac{1}{60}$. Voilà donc une orbite peu différente d'une ellipſe, & dont néanmoins les perturbations ſeroient très-difficiles à déterminer, ſi on s'y prenoit par la méthode dont il s'agit ici.

19.

19. Suppoſons, pour plus de ſimplicité, que le Soleil S, & deux Planetes P, P' ſoient dans le même plan, & rangés en ligne droite, & que les Planetes P, P' ſoient lancées perpendiculairement avec des vîteſſes G, G'. Soit r la diſtance de la Planete P au Soleil S, & $r+ir$ celle de la Planete P', i étant ſuppoſé fort petit. On aura d'abord $GG = \frac{2S}{r} - \frac{S}{a}$, a étant le demi-axe de l'ellipſe que tend à décrire la Planete P; & de même on aura pour la Planete P', $G'G' = \frac{2S}{r+ir} - \frac{S}{a} = \frac{2S}{r} - \frac{2Si}{r} - \frac{S}{a'}$ à très-peu près. Maintenant ſoit $g = G' - G$, & $ir = \alpha$; il eſt clair qu'on auroit $gg = \frac{2(P+P')}{\alpha} - \frac{P+P'}{a}$, a étant le demi-axe de l'ellipſe que la Planete P' tendroit à décrire autour de la Planete P. Faiſant évanouir g, on aura la valeur de a; & ſi cette valeur eſt poſitive, & beaucoup plus petite que r, & que de plus $\frac{P+P'}{\alpha^2}$ ſoit beaucoup plus grand que $\frac{S\alpha}{r^3}$, la Planete P' ſera un ſatellite de la Planete P. Car cette Planete P' décrira à peu près une ellipſe autour de P, puiſque les forces perturbatrices, qui ſont de l'ordre de $\frac{S\alpha}{r^3}$, ſeront peu conſidérables par rapport à la force centrale $\frac{P+P'}{\alpha^2}$. Et ſi la maſſe du ſatellite P' étoit inconnue, & que $\frac{P}{\alpha^2}$

fût encore très-grand par rapport à $\frac{Sa}{r^3}$, il eſt clair que P' ſeroit encore à plus forte raiſon ſatellite de P.

20. On pourroit faire quelqu'uſage de ce moyen, pour s'aſſurer, au moins en certains cas, ſi une Comete qui vient à s'approcher fort près d'une Planete, en deviendra ſatellite; & en général on voit aſſez comment on peut étendre plus loin cette méthode, quelles que ſoient les diſpoſitions, les directions & les vîteſſes initiales de P & de P'. Car ayant trouvé d'abord les demi-axes a, a, de l'ellipſe de la Planete P autour du Soleil, & de la Planete P' autour de P, ſoit b la plus petite diſtance de P à S, & b la plus grande de P' à P, il eſt évident que ſi $\frac{Sb}{b^3}$ eſt beaucoup plus petit que $\frac{P+P'}{b^2}$; la Planete P' ſera un ſatellite de P.

21. Je reviens à la perturbation de la Planete principale par l'action de ſes ſatellites. On trouveroit, par une méthode analogue à celle de l'*art.* 2, les perturbations de la Planete principale, quand même les orbites des ſatellites ne ſeroient pas ſenſiblement circulaires, mais qu'elles ſeroient des ellipſes très-différentes d'un cercle, ou même des courbes un peu différentes de ces ellipſes. Car on voit par la Théorie précédente qu'il ſuffit d'avoir à très-peu près le mouvement des ſatellites par rapport à la Planete principale. Or ce mouvement ſera à peu près elliptique, ſi les forces perturbatrices ſont peu conſidérables.

22. Si la Planete a pluſieurs ſatellites, dont il y en ait un (mais un ſeul) très-gros par rapport aux autres, & même de maſſe comparable à celle de la Planete, on pourroit de même trouver à très-peu près la perturbation de la Planete. Car quoique dans ce cas les orbites des petits ſatellites ſoient ou puiſſent être fort éloignées de la figure elliptique, cependant les perturbations de la Planete principale ſeront à peu près les mêmes que s'il n'y avoit que le ſeul gros ſatellite dont il s'agit, & dont on ſuppoſe que l'orbite eſt preſque elliptique, ſuppoſition légitime, puiſque cette orbite ſera peu altérée par l'action des autres ſatellites.

23. L'action que le Soleil exerce ſur le centre de gravité d'une Planete, de Jupiter, par exemple, & de ſes ſatellites, étant à très-peu près en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, on pourra démontrer de la même maniere que l'action de Saturne, par exemple, ſur le centre de gravité de Jupiter & de ſes ſatellites, eſt en raiſon inverſe du quarré de la diſtance. D'où l'on peut tirer un moyen facile pour trouver les perturbations de Jupiter, cauſées à-la-fois par ſes ſatellites & par Saturne.

24. On peut remarquer en paſſant, que non-ſeulement le centre de gravité commun d'une Planete & de ſes ſatellites décrit ſenſiblement une ellipſe autour du Soleil, mais encore autour du centre de gravité commun de tout le ſyſtême, c'eſt-à-dire, du Soleil, de la Planete & de ſes ſatellites. C'eſt ce qu'on démontrera aiſément

en conſidérant 1°. que le Soleil, le centre de gravité de la Planete & de ſes ſatellites, & le centre de gravité commun de tout le ſyſtême, ſont toujours en ligne droite. 2°. Que les diſtances du centre de gravité commun aux deux autres points, ſont toujours en raiſon conſtante, ſavoir en raiſon de la maſſe du Soleil à la ſomme des maſſes de la Planete & de ſes ſatellites. 3°. Que par conſéquent la courbe décrite par le Soleil autour du centre de gravité commun, la courbe décrite par le centre de gravité de la Planete & de ſes ſatellites autour du centre de gravité commun, & la courbe, ſenſiblement elliptique, décrite par le centre de gravité de la Planete & de ſes ſatellites autour du Soleil, ſont des courbes ſemblables. Donc, &c.

§. III.

Sur les Equations ſéculaires des Planetes.

1. J'ai fait voir dans le Tome V de mes *Opuſcules*, pag. 386, que s'il y a dans l'équation du rayon vecteur de l'orbite d'une Planete deux termes de cette forme α cof. $N\zeta + \mathfrak{C}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$, γ étant fort petit, il en réſulte dans l'équation du temps un terme de cette forme A ſin. $\gamma\zeta$, d'où peut réſulter une équation ſéculaire apparente. Je vais faire voir ici comment ces deux mêmes termes α cof. $N\zeta + \mathfrak{C}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$ peuvent altérer le mouvement de l'apogée & l'excentricité. Voici quelques lemmes préliminaires.

2. Soit α cos. $Z + \mathfrak{G}$ cos. Z' une quantité qu'on propose de changer en k cos. ζ ; je mets d'abord $Z + \mathfrak{d}$ au lieu de Z', & j'ai α cos. $Z + \mathfrak{G}$ cos. $Z' = \alpha$ cos. $Z + \mathfrak{G}$ cos. $(Z + \mathfrak{d}) = \alpha$ cos. $Z + \mathfrak{G}$ cos. $\mathfrak{d}$ cos. $Z - \mathfrak{G}$ sin. $\mathfrak{d}$ sin. $Z = (\alpha + \mathfrak{G}$ cos. $\mathfrak{d})$ cos. $Z - \mathfrak{G}$ sin. $\mathfrak{d}$ sin. Z. Pour transformer cette quantité en k cos. ζ, je fais $\zeta = Z + \omega$, & j'ai k cos. $\zeta = k$ cos. ω cos. $Z -$ k sin. ω sin. Z, de sorte qu'on aura $\frac{\text{sin. } \omega}{\text{cos. } \omega} = \frac{\mathfrak{G} \text{ sin. } \mathfrak{d}}{\alpha + \mathfrak{G} \text{ cos. } \mathfrak{d}}$; & $k^2 = (\alpha + \mathfrak{G}$ cos. $\mathfrak{d})^2 + \mathfrak{G}^2$ sin. $\mathfrak{d}^2 = \alpha^2 + 2\alpha\mathfrak{G}$ cos. $\mathfrak{d} + \mathfrak{G}^2$; donc k cos. $\zeta = \sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\mathfrak{G}}$ cos. $\mathfrak{d} + \mathfrak{G}^2) \times$ cos. $(Z + \omega)$, l'angle ω étant tel que tang. $\omega = \frac{\mathfrak{G} \text{ sin. } \mathfrak{d}}{\alpha + \mathfrak{G} \text{ cos. } \mathfrak{d}}$.

3. Il est aisé de voir qu'on peut donner différentes formes à la quantité k cos. ζ. En effet, 1°. au lieu de α cos. $Z + \mathfrak{G}$ cos. $Z' = \alpha$ cos. $Z + \mathfrak{G}$ cos. $(Z + \mathfrak{d})$, il n'y a qu'à, par exemple, écrire $\mathfrak{G}$ cos. $Z' + \alpha$ cos. $(Z' - \mathfrak{d})$, & mettre dans les valeurs de k & de ω, trouvées ci-dessus, $-\mathfrak{d}$ au lieu de $\mathfrak{d}$, Z' au lieu de Z, α au lieu de $\mathfrak{G}$, & $\mathfrak{G}$ au lieu de α, & on aura $\zeta = Z' + \omega'$, ω' étant un autre angle que l'angle ω trouvé ci-dessus. 2°. En général, soit Ω un angle quelconque, constant ou variable à volonté, on peut au lieu de α cos. $Z + \mathfrak{G}$ cos. Z', écrire α cos. $(Z + \Omega - \Omega) + \mathfrak{G}$ cos. $(Z + \Omega + \mathfrak{d} - \Omega) = \alpha$ cos. $(Z + \Omega) \times$ cos. $\Omega +$ α sin. $(Z + \Omega)$ sin. $\Omega + \mathfrak{G}$ cos. $(Z + \Omega)$ cos. $(\mathfrak{d} - \Omega)$ $+ \mathfrak{G}$ sin. $(\mathfrak{d} - \Omega)$ sin. $(Z + \Omega) = [\alpha$ cos. $\Omega + \mathfrak{G}$ cos.

$(\delta - \Omega)] \times \text{cos.}(Z + \Omega) + [\alpha \text{ sin. } \Omega - \mathfrak{C} \text{ sin.} (\delta - \Omega)] \times \text{sin.}(Z + \Omega)$, quantité qu'on peut réduire aiſément par les méthodes précédentes à la forme K cos. $(Z + \Omega + \omega) = K$ cos. $(Z + \Omega)$ cos. $\omega - K$ sin. ω sin. $(Z + \Omega)$.

4. Si aux deux termes α cos. $Z + \mathfrak{C}$ cos. Z', on en joignoit un troiſiéme $+ \mathfrak{C}'$ cos. Z'', il eſt clair qu'après avoir réduit les deux premiers à k cos. ζ, on réduiroit de même k cos. $\zeta + \mathfrak{C}'$ cos. Z'' à k' cos. ζ'; & ainſi de ſuite, quel que ſoit le nombre des termes ajoutés; ce qu'on peut d'ailleurs voir directement par une méthode analogue à celle de l'*art.* 2 précédent, en écrivant au lieu de $\alpha + \mathfrak{C}$ cos. $Z' + \mathfrak{C}'$ cos. Z'', α cos. $Z + \mathfrak{C}$ cos. $(Z + \delta) + \mathfrak{C}'$ cos. $(Z + \delta') = (\alpha + \mathfrak{C}$ cos. $\delta + \mathfrak{C}'$ cos. $\delta')$ cos. $Z - (\mathfrak{C}$ sin. $\delta + \mathfrak{C}'$ sin. $\delta')$ sin. Z, d'où l'on tirera aiſément 1°. $k' = \sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\mathfrak{C}}$ cos. $\delta + 2\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ cos. δ cos. $\delta' + \mathfrak{C}\mathfrak{C} + \mathfrak{C}'\mathfrak{C}' + 2\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ sin. δ' sin. $\delta)$, quantité dans laquelle on peut mettre au lieu de $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}' \times [$cos. δ cos. $\delta' +$ sin. δ sin. $\delta']$, $2\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ cos. $(\delta - \delta')$; 2°. $\zeta'' = Z + \omega'$, ω' étant tel que tang. ω' ſoit égal à $\frac{\mathfrak{C} \text{ sin. } \delta + \mathfrak{C}' \text{ sin. } \delta'}{\alpha + \mathfrak{C} \text{ cos. } \delta + \mathfrak{C}' \text{ cos. } \delta'}$. Il en ſera de même des autres cas; enſorte que toute quantité compoſée de termes de cette forme α cos. Z, α & Z étant tels qu'on voudra, pourra toujours ſe réduire à une ſeule quantité de la forme k cos. ζ.

5. Il n'y auroit pas plus de difficulté quand même il ſe trouveroit parmi les termes de la forme α cos. Z,

d'autres termes de la forme δ sin. Z'. En effet, on peut toujours changer δ sin. Z' en δ cos. $(90° - Z') = \delta$ cos. Z''; ainsi ce cas se réduit au précédent; il est d'ailleurs aisé de voir que α cos. $Z + \mathfrak{C}$ sin. Z', par exemple, se change en α cos. $Z + \mathfrak{C}$ sin. $(Z + \delta) = (\alpha + \mathfrak{C}$ sin. $\delta)$ cos. $Z + \mathfrak{C}$ cos. δ sin. $Z = k$ sin. ζ, en faisant $k = \sqrt{(\alpha^2 + 2\alpha\mathfrak{C}$ sin. $\delta + \mathfrak{C}^2)}$ & $\zeta = Z + \omega$, de maniere que cotang. $\omega = \frac{\mathfrak{C}\text{ cos. }\delta}{\alpha + \mathfrak{C}\text{ sin. }\delta}$. Il en sera de même des autres cas plus composés, sur lesquels il est inutile de nous arrêter plus long-temps.

6. Donc en général toute quantité composée de termes de la forme α cos. Z, $\mathfrak{C}$ sin. Z', &c. peut se réduire à k cos. ζ; ou si l'on veut encore à k sin. ζ', en prenant $\zeta' = 90° - \zeta$.

7. Il est de plus facile de voir que deux termes de cette forme α cos. $(Z + A) + \mathfrak{C}$ sin. $(Z + B)$, α & $\mathfrak{C}$ étant des constantes ainsi que A & B, se réduiront à un seul terme de cette forme α' cos. $(Z + C)$, α' & C étant encore deux constantes. En effet, on aura α cos. $(Z + A) + \mathfrak{C}$ sin. $(Z + B) = (\alpha$ cos. $A + \mathfrak{C}$ sin. $B) \times$ cos. $Z + (\mathfrak{C}$ cos. $B - \alpha$ sin. $A)$ sin. Z. Or α' cos. $(Z + C) = \alpha'$ cos. C cos. $Z - \alpha'$ sin. C sin. Z; d'où l'on tire $-$ tang. $C = \frac{\mathfrak{C}\text{ cos. }B - \alpha\text{ sin. }A}{\mathfrak{C}\text{ sin. }B + \alpha\text{ cos. }A}$, & $\alpha'^2 = \alpha^2 + \mathfrak{C}^2$.

8. Soient donc α cos. $N\zeta + \mathfrak{C}$ cos. $(N\zeta + \gamma\zeta)$ deux quantités proposées, dans lesquelles γ soit constant,

ainſi que N & α, 6; on les réduira à la quantité k cof. ζ', en prenant $k = \sqrt{(\alpha^2 + 6^2 + 2\alpha 6 \text{ cof. } \gamma z)}$, & $\zeta' = Nz + \omega$, ω étant tel que tang. $\omega = \frac{6 \text{ ſin. } \gamma z}{\alpha + 6 \text{ cof. } \gamma z}$, enſorte que k cof. ζ' ſera $\sqrt{(\alpha^2 + 6^2 + 2 6 \alpha \text{ cof. } \gamma z)} \times$ cof. $(Nz + \omega)$, ω ayant la valeur qu'on vient d'indiquer.

9. Soit maintenant, comme dans le cinquiéme Volume de nos *Opuſcules*, pag. 386, & par les mêmes raiſons $z = \zeta + \delta$, ζ renfermant tant de circonférences qu'on voudra, & δ pluſieurs circonférences, mais de maniere que $\gamma\delta$ reſte très-petit, on aura tang. $\omega = \frac{6 \text{ ſin. } (\gamma\zeta + \gamma\delta)}{\alpha + 6 \text{ cof. } (\gamma\zeta + \gamma\delta)} = \frac{6 \text{ ſin. } \gamma\zeta + 6\gamma\delta \text{ cof. } \gamma\zeta, \&c.}{\alpha + 6 \text{ cof. } \gamma\zeta - 6\gamma\delta \text{ ſin. } \gamma\zeta, \&c.} = \frac{6 \text{ ſin. } \gamma\zeta}{\alpha + 6 \text{ cof. } \gamma\zeta} + \frac{6\gamma\delta \text{ cof. } \zeta}{\alpha + 6 \text{ ſin. } \gamma\zeta} + \frac{6^2 (\text{ſin. } \gamma\zeta)^2 . \gamma\delta}{(\alpha + 6 \text{ cof. } \gamma\zeta)^2}$, &c. plus les termes de l'ordre de $\gamma^2\delta^2$, α, 6, γ & ζ étant conſtans, & δ ſeule étant variable. On aura de même $k = \sqrt{[\alpha^2 + 6^2 + 2 6 \alpha \text{ cof. } (\gamma\zeta + \gamma\delta)]} = \sqrt{(\alpha^2 + 6^2 + 2 6 \alpha \text{ cof. } \gamma\zeta - 2 6 \alpha \gamma\delta \text{ ſin. } \gamma\zeta, \&c.)} = \sqrt{(\alpha^2 + 6^2 + 2 6 \alpha \text{ cof. } \gamma\zeta)} - \frac{6 \alpha \gamma\delta \text{ ſin. } \gamma\zeta}{\sqrt{(\alpha^2 + 6^2 + 2 6 \alpha \text{ cof. } \gamma\zeta)}}$, &c.

Voyez l'Appendice à la fin de cet Ouvrage.

10. On a vu ailleurs que dans la Théorie de Saturne & de Jupiter le rayon vecteur eſt exprimé par une quantité de cette forme $a + \alpha$ cof. $Nz + 6$ cof. $(Nz + \gamma z)$, α & 6 étant des quantités conſtantes & petites, à peu près du même ordre, ſavoir $Nz = z - pz$, & $Nz + \gamma z = z = nz + nz - p' nz$; où il faut remarquer que

que ζ déſigne le mouvement moyen de Jupiter, par exemple, ſi c'eſt de cette Planete qu'on cherche les altérations, $n\zeta$ celui de Saturne, ρn le mouvement de l'aphélie de Jupiter, & $\rho' n\zeta$ celui de l'aphélie de Saturne, de maniere que $N\zeta + \gamma\zeta = \zeta - \rho\zeta - n\zeta + n\zeta - \rho' n\zeta + \rho\zeta = N\zeta + \rho\zeta - \rho' n\zeta$, ce qui donne $\gamma = \rho - \rho' n$. Donc $\gamma\zeta = \rho\zeta - \rho' n\zeta =$ à la différence du mouvement de l'aphélie des deux Planetes, pendant le temps que Jupiter a décrit l'arc ζ, c'eſt-à-dire, égal à la diſtance de ces deux aphélies dans l'inſtant où l'on commence à compter l'arc δ. Donc $\gamma\zeta$ eſt la diſtance de l'aphélie de Jupiter à celui de Saturne lorſque $\delta = 0$. Ainſi nommant D cette diſtance, les valeurs de k & de ω ſont exprimées en conſtantes α, ζ, D, avec la ſeule variable δ. On remarquera encore que $\gamma\delta$ eſt la variation de la diſtance des deux aphélies à la fin du temps où eſt parcouru l'arc variable δ.

11. L'angle $\gamma\delta$ étant fort petit, & tout le reſte étant conſtant, il eſt viſible que k ſera égal à une quantité de cette forme $A + B\gamma\delta + C\gamma^2\delta^2$, &c. & tang. $\omega = A + B'\gamma\delta + C'\gamma^2\delta^2$, d'où il ſera facile de tirer $\omega = A' + B''\gamma\delta + C''\gamma^2\delta^2$, &c. Ainſi on aura par ce moyen les variations $B\gamma\delta + C\gamma^2\delta^2$, &c. de l'excentricité k, & les variations $B''\gamma\delta + C''\gamma^2\delta^2$, &c. du mouvement de l'aphélie. *Voyez l'Appendice à la fin de cet Ouvrage.*

12. Pour avoir maintenant les variations de l'équation du centre, on conſidérera qu'elle eſt α' ſin. $N\zeta +$ ζ' ſin. $(N\zeta + \gamma\zeta) = \alpha'$ ſin. $(N\zeta + N\delta) + \zeta'$ ſin.

$(N\zeta + N\delta + \gamma\zeta + \gamma\delta) = \alpha' \text{ sin. } (N\zeta + N\delta) + \mathfrak{C}' \text{ sin. } (N\zeta + N\delta) \text{ cos. } (\gamma\zeta + \gamma\delta) + \mathfrak{C}' \text{ cos. } (N\zeta + N\delta) \text{ sin. } (\gamma\zeta + \gamma\delta) = \sigma \text{ sin. } (N\zeta + N\delta + \varpi)$, en faiſant ϖ tel que tang. $\varpi = \frac{\mathfrak{C}' \text{ sin. } (\gamma\zeta + \gamma\delta)}{\alpha' + \mathfrak{C}' \text{ cos. } (\gamma\zeta + \gamma\delta)}$ & $\sigma = \sqrt{[\alpha'^2 + \mathfrak{C}'^2 + 2\mathfrak{C}'\alpha' \text{ cos. } (\gamma\zeta + \gamma\delta)]}$. Donc l'équation du centre ſera auſſi de cette forme $(A' + B'\gamma\delta + C'\gamma^2\delta^2) \text{ sin. } (N\zeta + N\delta + D + B''\gamma\delta + C''\gamma^2\delta^2)$. On remarquera que comme les coefficiens N & $N + \gamma$ ſont peu différens de l'unité, α' & $\mathfrak{C}'$ ſeront très-peu différens de 2α & de $2\mathfrak{C}$, & qu'ainſi ϖ eſt ſenſiblement $= \omega$, & σ ſenſiblement $= 2k$. *V. l'Appendice.*

13. Nous avons déja remarqué que comme $\gamma\zeta$ eſt la diſtance des aphélies de Jupiter & de Saturne, lorſque t & $\delta = 0$, $\gamma\delta$ ſera la quantité dont cette diſtance variera pendant tout le temps t; or quoique les Aſtronomes different beaucoup entr'eux ſur le mouvement des aphélies de Saturne & de Jupiter, cependant il ne paroît pas qu'en un ſiécle la diſtance des deux aphélies augmente d'un degré à beaucoup près (*a*); d'où il s'enſuit que la diſtance $\gamma\zeta$ des aphélies, qui en 1750 étoit de 79° 6′ 12″, n'augmentera pas aſſez pendant pluſieurs ſiécles, pour que l'angle $\gamma\zeta$ augmente ſenſiblement.

14. Nous avons vu dans le Tome V des *Opuſcules*, pag. 386, que le terme A ſin. $\gamma\zeta$ de l'expreſſion du temps, donnoit un terme de cette forme $A\gamma\delta$ cos. $\gamma\zeta$,

(*a*) Suivant M. Caſſini, cette diſtance augmente de 34′ en 100 ans, & ſuivant M. Halley, de 13′ ſeulement.

proportionnel au moyen mouvement uniforme, & qui s'ajoute à ce mouvement moyen; ce terme n'eſt pas le ſeul qui ſoit donné par les termes α cof. $N\zeta + 6$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$; car en élevant tout-à-fait ces deux termes au quarré, comme il eſt néceſſaire pour l'expreſſion du temps, on aura deux termes de cette forme $(B\alpha\alpha + C66)\,d\zeta$, qui donnent auſſi une partie $(B\alpha\alpha + C66)\,\delta$, proportionnelle à la partie uniforme du moyen mouvement. Mais la partie eſſentielle à conſidérer ici, celle qui conſtitue l'*altération ſéculaire* du moyen mouvement, proportionnelle au quarré de $\delta\delta$, provient principalement du terme A ſin. $\gamma\zeta$.

15. Suivant les dernieres Tables de M. Mayer, l'équation ſéculaire de la Lune eſt de $9''$ en 100 ans, de $36''$ en 200 ans, de $81''$ en 300 ans, enfin en 3000 ans de $8100''$ ou $2^\circ\ 15'$, & ainſi de ſuite. Or cette équation étant proportionnelle à $\gamma^2\delta^2$, & $\gamma\delta$ devant être fort petit, il eſt clair que le nombre γ devra être d'une très-grande petiteſſe, puiſqu'en 3000 ans δ renferme environ 39000 révolutions de la Lune, ou $39000 \times 360^\circ$. Donc l'angle $\gamma\zeta$ n'augmentera pas ſenſiblement dans la Théorie de la Lune pendant un très-grand nombre de ſiécles; cet angle $\gamma\zeta$ eſt le même que celui que nous avons nommé $\lambda\zeta$, pag. 16; d'où l'on peut conclure la légitimité de la ſuppoſition que nous avons faite ci-deſſus (XLV. Mémoire, §. I, *art.* 9, pag. 20), que l'angle $\lambda\zeta$ n'augmente pas ſenſiblement dans la Théorie de la Lune pendant pluſieurs ſiécles, de ma-

niere qu'en ſuppoſant ζ augmenté de ρ, $\lambda\rho$ reſteroit extrêmement petit, ou du moins tel que ſin. $(\lambda\zeta + \lambda\rho)$ n'augmenteroit pas ſenſiblement.

17. Non-ſeulement des termes de la forme α cof. $N\zeta + \mathfrak{G}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$ donneroient dans l'expreſſion du temps un terme proportionnel à $\int\int$, mais il en ſeroit de même de termes de cette forme α cof. $(N\zeta + A) + \mathfrak{G}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta + B)$; puiſque ces termes donneroient dans l'expreſſion du temps un terme de cette forme A ſin. $(\gamma\zeta + C)$ ou A ſin. $(\gamma\zeta + \gamma\int + C)$; d'où il eſt aiſé de voir qu'il réſultera un terme proportionnel à $\int\int$, dans l'expreſſion du mouvement vrai.

17. L'expreſſion du rayon étant α cof. $(N\zeta + A) + \mathfrak{G}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta + B)$, on trouvera de même très-facilement les variations de l'excentricité, de l'équation du centre & du mouvement de l'aphélie, par une méthode toute ſemblable à celle qu'on a ſuivie pour le cas de $A = 0$ & de $B = 0$.

18. Si l'expreſſion du rayon, au lieu des termes α cof. $N\zeta + \mathfrak{G}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$, en renfermoit de cette eſpéce α' cof. $(N\zeta + A) + \mathfrak{G}'$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta + B) +$ a ſin. $(N\zeta + C) +$ b ſin. $(N\zeta + \gamma\zeta + D)$, il eſt très-aiſé de voir par l'*art.* 7 ci-deſſus, p. 327, que ces quatre termes pourroient ſe réduire à α'' cof. $(N\zeta + E) + \mathfrak{G}''$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta + F)$; ainſi il réſultera toujours de ces ſortes de termes une altération ſéculaire du moyen mouvement, proportionnelle à $\int\int$; & on trouvera de même facilement les variations de l'excentricité, de l'é-

quation du centre, & du mouvement de l'aphélie dans cette hypothèse.

19. Si on avoit dans l'équation du rayon vecteur un troiſiéme terme $\mathcal{S}$ cof. $(N\zeta + \gamma'\zeta)$, γ' étant encore fort petit, il eſt encore facile de voir que ce terme produiroit dans l'équation du temps un terme de la forme A' ſin. $\gamma'\zeta$, & un autre de la forme B' ſin. $(\gamma'\zeta - \gamma\zeta)$, & que de ces deux termes naîtroit encore une équation ſéculaire proportionnelle au quarré du temps; ce qu'il eſt inutile d'expliquer plus au long.

20. On trouveroit avec la même facilité les altérations produites par ce nouveau terme dans l'excentricité, l'équation du centre & le mouvement de l'aphélie; il ſuffiroit pour cela d'employer la même méthode qu'on a employée ci-deſſus pour déterminer les altérations réſultantes des deux termes α cof. $N\zeta + \mathcal{C}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$.

21. On ſait déja que la valeur du rayon vecteur de Jupiter, étant ſuppoſée $= a + \alpha$ cof. $N\zeta + \mathcal{C}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$, donne dans l'expreſſion du temps dt un terme de la forme $\alpha\mathcal{C}d\zeta$ cof. $\gamma\zeta$, d'où réſulte une équation ſéculaire. Mais ſi de plus il y avoit dans l'expreſſion du rayon un terme de la forme $B\alpha\mathcal{C}$ cof. $\gamma\zeta$, B étant une quantité finie, il ſeroit très-néceſſaire d'avoir égard à ce terme pour déterminer la valeur abſolue de l'équation ſéculaire. La recherche de ces ſortes de termes dans l'expreſſion du rayon, paroît donc très-digne de l'attention des Géometres.

22, Les mêmes méthodes qu'on vient de donner pour déterminer les équations séculaires, dans les cas où l'expression du rayon ne renferme point d'arcs de cercle, peuvent s'appliquer aisément aux cas où elle en renferme. Par exemple, si l'expression du rayon renfermoit les quantités α cos. $N(\zeta + \delta) + \zeta(A + \gamma'\delta) \times$ sin. $N(\zeta + \delta)$, il est évident (en élevant cette expression au quarré) qu'il en résulteroit, dans l'expression différentielle du temps, un terme de la forme $2\zeta^2\gamma' A\delta\, d\delta \times [\text{sin.}(N\zeta + N\delta)]^2$, d'où résulte un terme de la forme $\zeta^2\gamma' A\delta\, d\delta$, & par conséquent un terme de la forme $\zeta^2\gamma' A\delta^2$ dans l'expression du mouvement vrai. Et il est clair que dans les cas plus compliqués, on pourra toujours employer la méthode qu'on vient d'expliquer, & trouver de même les variations de l'excentricité, de l'équation du centre & du mouvement de l'aphélie; puisqu'on pourra dans tous les cas réduire l'expression du rayon à k cos. $(Z' + A)$, & celle de l'équation du centre à k' sin. $(Z'' + B)$, les quantités k, k', A, B, étant constantes ou variables.

23. Si N & $N + \gamma$ étoient imaginaires, il n'y auroit pas plus de difficulté; il faudroit seulement alors 1°. écrire au lieu de α & de ζ, $\alpha + \delta\sqrt{-1}$ & $\alpha - \delta\sqrt{-1}$; 2°. au lieu de N & $N + \gamma$, $M + \nu\sqrt{-1}$ & $M - \nu\sqrt{-1}$, & faire attention que $\gamma = -2\nu\sqrt{-1}$. 3°. Il faut aussi remarquer que $\frac{\text{sin. } A\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{e^{-A} - e^{+A}}{-2}$, & que cos. $A\sqrt{-1} = \frac{e^{-A} + e^{+A}}{2}$.

4°. D'après ces obſervations le reſte du calcul ſe fera comme ci-deſſus. Voyez le Tome I de nos *Opuſcules*, pag. 111. On peut d'ailleurs, ſans avoir recours aux quantités imaginaires, réſoudre directement le cas dont il s'agit, par une méthode entiérement analogue aux précédentes, en conſidérant que $c^{\iota+\gamma\iota} = c^{\iota} + \gamma\delta c^{\iota} + \frac{\gamma\gamma\delta\delta c^{\iota}}{2}$, &c. d'où l'on trouvera aiſément les termes qui contiendront le quarré $\delta\delta$ dans l'expreſſion du lieu.

§. IV.

Sur la Préceſſion des Equinoxes.

1. Dans le Tome V de ces *Opuſcules*, pag. 281 & ſuiv. j'ai remarqué pluſieurs mépriſes échappées à M. Simpſon dans la ſolution du problême de la Préceſſion des Equinoxes. Mais il en eſt une, non moins importante que les autres, & qui m'avoit échappée. C'eſt la valeur qu'il donne de ddx (V. p. 283 du Tome cité) & qu'il trouve $\frac{dx\,d\zeta}{r} \times$ cof. ζ, au lieu que cette quantité a une valeur double, égale à $\frac{2\,dx\,d\zeta}{r}$ cof. ζ, ou $2\,dx\,d\zeta$ cof. ζ, en ſuppoſant $r = 1$.

2. Pour le prouver, ſoit FAG (Fig. 41) le plan perpendiculaire à l'axe de rotation, & ſur lequel le mouvement du corps eſt cenſé projetté; ſoit $AB =$ ſin. ζ, CD la projection du chemin que fait le corps

dans un inſtant. Dans l'inſtant ſuivant, s'il obéiſſoit à ſa ſimple inertie, la projection de ſon mouvement ſeroit la ligne DE égale & en ligne droite avec CD. Pendant le temps que le corps décriroit la ligne CDE, le cercle, en tournant autour de l'axe de rotation, décriroit l'angle $CAF = 2dx = \frac{2BC}{AB}$; or le ddx qu'on cherche eſt l'angle EAF, différence des angles FAH & EAH, ou CAB & EAH, c'eſt-à-dire, $\frac{BC}{AB} - \frac{EH}{AH} = BC\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AH}\right) = \frac{BC \times 2BD}{AB}$ $= 2dx\,d\,\text{ſin.}\,z = 2dx\,dz\,\text{cof.}\,z$.

3. L'erreur de M. Simpſon, comme il eſt aiſé de le voir en examinant ſa ſolution, vient de ce qu'il a ſuppoſé, qu'en décrivant du centre A & du rayon AD un arc DO (égal à ſon ſinus, à un infiniment petit du troiſiéme ordre près,) cet arc étoit égal à l'arc EH décrit du rayon AE, ou à ſon ſinus. Or il eſt viſible que le ſinus EH étant rigoureuſement $= BC$ (à cauſe de $DE = CD$), eſt plus petit que DO d'une quantité égale à la différence de BC & de DO, c. à. d. égale à $\frac{BC \times BD}{AB} = dx\,dz\,\text{cof.}\,z$; enſorte que PEH étant faite égale, comme elle le doit être, à $\frac{DO \times AH}{AD}$, ou $\frac{BC.AH}{AB}$, ou $dx(1 + 2dz\,\text{cof.}\,z)$, on aura $\frac{PH - EH}{AE} = dx(1 + 2dz\,\text{cof.}\,z) - dx =$

$2dx\,dz \times$

$\frac{1}{2} dx dz \times$ cos. z, au lieu que M. Simpſon ſuppoſant par ſon calcul $EH = DO = dx(1 + dz$ cos. $z)$, il ne trouve que $\frac{PH - EH}{AE} = dx dz$ cos. z, c'eſt-à-dire, égal à la moitié de ſa valeur réelle.

4. Ayant corrigé cette mépriſe ſur la valeur de ddx, donnée par le calcul de M. Simpſon, & ayant corrigé en même-temps, comme nous l'avons fait dans la pag. 285 du Volume cité, ſon erreur ſur la valeur de la force centrifuge, il ſe trouve que les deux mépriſes ſe compenſent l'une l'autre, & que le réſultat de la valeur de φ eſt le même qu'a trouvé M. Simpſon. Mais l'exactitude de ce réſultat, bien loin de juſtifier la ſolution de ce Géometre, ne la rend au contraire que plus fautive, puiſqu'il provient de *deux* erreurs dont l'effet ſe compenſe mutuellement. D'ailleurs en admettant même l'exactitude de ce réſultat, la ſolution du problême de la Préceſſion des Equinoxes, donnée par cet Auteur, n'en eſt pas plus exacte, étant ſujette à beaucoup d'autres difficultés, expoſées à l'endroit cité.

5. Dans la ſeconde ſolution que nous avons donnée du problême de la *Préceſſion des Equinoxes*, il eſt aiſé de voir que le point O de l'équateur (Fig. 42) a d'abord au premier inſtant un mouvement infiniment petit du ſecond ordre, en vertu de la force attractive du Soleil ou de la Lune; & que ce point O, ſe mouvant à-la-fois ou tendant à ſe mouvoir uniformément ſuivant OA, & d'un mouvement uniformément accéléré pendant un

inſtant, ſuivant la ligne AB, infiniment petite du ſecond ordre, ce point O décrit l'arc infiniment petit de parabole ou de cercle OiB, de maniere qu'en menant BC tangente en B, & $O\mathfrak{C}$ parallèle à BC, on aura $AC = \frac{AO}{2}$, & $A\mathfrak{C} = 2AB$; & l'angle de déviation de l'équateur, c'eſt-à-dire, l'angle que le nouvel équateur forme avec le précédent, ſera ACB ou $AO\mathfrak{C}$ qui lui eſt égal, c'eſt-à-dire, $\frac{A\mathfrak{C}}{AO}$. Or $A\mathfrak{C}$ eſt la valeur qu'auroit AB, décrit d'un mouvement uniforme; & cette valeur de AB ſeroit dans ce cas φdz^2, & dans le cas du mouvement uniformément accéléré, elle ne ſeroit que $\frac{\varphi dz^2}{2}$. Voilà pourquoi j'ai ſuppoſé dans cette ſeconde ſolution $AB = \varphi dz^2$; ſi je l'euſſe ſuppoſé égal à $\frac{\varphi dz^2}{2}$, il eût fallu, pour avoir l'angle ACB, diviſer AB, non par AO ou dx, comme j'ai fait dans cette ſolution, mais par $\frac{AO}{2}$, ce qui auroit donné le même réſultat $\frac{\varphi dz^2}{dx}$.

6. C'eſt pour cela que le réſultat de notre ſeconde ſolution s'accorde avec celui de M. Euler (*Mém. de Berlin* 1749). M. Euler donne à la vérité à AB ſa valeur réelle & rigoureuſe $\frac{\varphi dz^2}{2}$, mais il ne diviſe AB que par la moitié de AO, pour avoir l'angle ACB.

§. V.

Sur les Atmoſpheres des Corps céleſtes.

Le but des Recherches ſuivantes eſt de donner ſur l'Atmoſphere des Planetes quelques Remarques que je crois nouvelles, & de corriger en même-temps quelques mépriſes où des Auteurs célébres ſont tombés ſur cette matiere.

1. Soient P, p (Fig. 43) les poles de la Planete, PEp un de ſes méridiens, E un point de ſon équateur, EA la hauteur de l'atmoſphere ſous l'équateur, & PB ſa hauteur au pole.

2. Il eſt d'abord évident que la plus grande hauteur A à laquelle l'atmoſphere puiſſe s'élever, eſt celle où la force centrifuge du point A eſt égale à ſa gravitation vers C; car au-delà de ce point les parties de l'atmoſphere ſe diſſiperoient.

3. Soit donc M la maſſe de la Planete, qu'on ſuppoſe conſidérablement plus grande que celle de l'atmoſphere, enſorte qu'on puiſſe négliger l'attraction de celle-ci; on aura, en appellant CA, ω, $\frac{M}{\omega^2}$ pour la valeur, au moins très-approchée, de l'attraction en A; car on ſuppoſe que la Planete ſoit à peu près ſphérique.

4. Soit de plus $CE = r$, & la force centrifuge en $E = \frac{M}{\alpha^3 rr}$, α étant un nombre indéterminé; on aura

donc $\frac{M\omega}{a^3 r^3}$ pour la force centrifuge en A, & par conſéquent $\frac{M}{\omega^2} = \frac{M\omega}{a^3 r^3}$, d'où $\omega = ar$. Nous faiſons abſtraction juſqu'à préſent de l'action des autres Planetes.

5. Pour déterminer préſentement le rapport entre CA & CB, nous nommerons CB, c, CP, r', & nous remarquerons que les deux ſurfaces ou couches AOB, EKP, devant être de niveau, parce que la peſanteur doit être perpendiculaire à chacune de ces ſurfaces, le poids de AE doit être égal à celui de BP. Or le poids de $AE = \frac{M}{r} - \frac{M}{\omega} - \frac{M\omega\omega}{2a^3 r^3} + \frac{M}{2a^3 r}$, en ſuppoſant d'abord l'atmoſphere homogene (a); & celui de $BP = \frac{M}{r'} - \frac{M}{c}$; donc $\frac{M}{r} - \frac{M}{\omega} - \frac{M\omega^2}{2a^3 r^3} + \frac{M}{2a^3 r} = \frac{M}{r'} - \frac{M}{c}$. De plus, l'équilibre de la ſurface EKP, donne $\frac{M}{r'} - \frac{M}{r} = \frac{M}{2a^3 r}$ (b); donc l'équation ſe réduit à $-\frac{M}{\omega} - \frac{M\omega^2}{2a^3 r^3} = -\frac{M}{c}$; ou $\frac{\omega^3}{2a^3 r^3} - \frac{\omega}{c} + 1 = 0$.

(a) Nous verrons plus bas que les réſultats donnés par cette ſuppoſition, ne ſont point altérés par l'hétérogénéité réelle de l'atmoſphere.

(b) Cette équation n'eſt rigoureuſement vraie que dans le ſyſtême de la gravitation de toutes les parties vers un centre, & non dans celui de l'attraction mutuelle de toutes les parties du Globe; mais comme la Terre eſt ſuppoſée preſque ſphérique, les rayons r' & r ſont à peu près égaux, & le terme $\frac{M}{2a^3 r}$ fort petit; ainſi les trois termes $\frac{M}{r'} - \frac{M}{r} - \frac{M}{2a^3 r}$ peuvent être négligés, & l'équation finale en ω ſubſiſte toujours, au moins à très-peu près.

6. Suppoſons maintenant que la hauteur ω ou CA (Fig. 43 & 44) ſoit moindre que αr; & nous aurons en faiſant $\mathcal{C} = pr$, & $p = \frac{2\alpha}{3m}$ (m étant un nombre indéterminé) l'équation $\omega^3 - \alpha^2 \omega r^2 \times 3m + 2\alpha^3 r^3 = 0$.

7. Cette équation aura deux racines imaginaires & une négative réelle, ſi $\frac{1}{27}(3m\alpha^2 r^2)^3$ eſt $< \frac{1}{4}(2\alpha^3 r^3)^2$, c'eſt-à-dire, ſi $m^3 < 1$, ou $m < 1$; elle aura deux racines réelles, poſitives & égales, ſi $m = 1$; & ces racines ſeront $\omega = \alpha r$, comme il eſt aiſé de le voir; & il y aura de plus, à cauſe de l'évanouiſſement du ſecond terme, une racine négative $-2\alpha r$ égale à la ſomme des deux poſitives. Enfin, ſi m eſt > 1, les trois racines ſeront réelles & inégales, deux poſitives, & une négative égale à leur ſomme.

8. De ces trois cas, le ſecond où $m = 1$, eſt celui de la plus grande hauteur de l'atmoſphere.

9. Le premier cas donne pour ω une valeur imaginaire, ou une valeur négative, toutes deux également illuſoires, & le problême eſt impoſſible; c'eſt-à-dire, que ſi p eſt $> \frac{2\alpha}{3}$, ou $CB > \frac{2\alpha . CE}{3}$, on ne pourra aſſigner la hauteur de l'atmoſphere.

10. Enfin, ſi $m = 1 + k$, k étant un nombre poſitif, ce qui eſt le troiſiéme cas, on aura $\omega^3 - 3\alpha^2 r^2 \omega + 2\alpha^3 r^3 = 3\alpha^2 r^2 \omega k$; d'où il eſt aiſé de voir, à cauſe que le terme $3\alpha^2 r^2 \omega k$ eſt poſitif, que des deux racines réelles poſitives qui donnent la valeur de ω, la plus petite ſera moindre que αr, & la ſeconde plus

grande que ar, puiſque ces deux valeurs ſeroient chacune $= ar$, ſi k étoit $= 0$.

11. Or il eſt clair d'abord que de ces deux valeurs, on ne doit employer que la valeur moindre que ar, puiſque la hauteur de l'atmoſphere ne ſauroit être plus grande que ar (*art.* 2 *&* 4).

12. Si donc on prend $C\alpha = ar$ (Fig. 45), & que CA & CR ſoient les deux racines indiquées dans l'*art.* 10, le point α ſera entre A & R; & comme la partie αR auroit une force centrifuge plus grande que ſa peſanteur vers C, & par conſéquent tendroit à ſe diſſiper vers R, on voit que la racine CR eſt inutile pour trouver la hauteur de l'atmoſphere. Ce qui n'empêche pas néanmoins que le poids de CR ne ſoit égal à celui de CA & CB, le poids de CR étant compoſé d'une partie poſitive depuis α juſqu'en C, & d'une négative depuis α juſqu'en R; enſorte que ſi l'atmoſphere s'étendoit juſqu'en R, & qu'elle fût ſuppoſée environnée d'une enveloppe ſolide, l'équilibre entre CR & CB ſeroit réel.

13. En ſuppoſant que l'atmoſphere ait ſa plus grande hauteur poſſible, on a $\omega^3 = \alpha^3 r^3$; donc (*art.* 5), on aura $\frac{\omega}{\zeta} = 1 + \frac{1}{2}$, ou $\omega = \frac{3\zeta}{2}$. Donc ſi l'atmoſphere étoit ſuppoſée homogene, & de la plus grande hauteur poſſible EA, la diſtance CA de A en C ſous l'équateur ſeroit à la diſtance CB ſous le pole, comme 3 à 2.

14. Au lieu de déterminer ω par ζ, on pourroit dans

l'équation $\frac{\omega^3}{2a^3r^3} - \frac{\omega}{\zeta} + 1 = 0$ de l'*art.* 5, déterminer ζ par ω, ou CB par CA, ce qui ſeroit encore plus commode à certains égards, d'autant que ζ n'eſt élevé qu'au premier degré dans l'équation. Nous diſons *à certains égards*, parce qu'il eſt bon d'un autre côté de conſidérer l'équation du troiſiéme degré en ω, pour connoître quelles ſont les valeurs de ω qui ſont utiles au problême, & quelles ſont celles qu'on doit rejetter.

15. Nous avons ſuppoſé dans les calculs précédens l'atmoſphere homogene ; ſur quoi nous remarquerons d'abord que la plus grande hauteur de l'atmoſphere eſt la même, ſoit qu'on la ſuppoſe homogene ou non, parce que cette plus grande hauteur dépend uniquement de la poſition du point A dont la force centrifuge ſeroit égale à ſa gravitation vers C. De plus, l'hétérogénéité de l'atmoſphere n'influe ni ſur ſa figure, ni ſur le rapport de la colonne CA de l'équateur à la colonne CB du pole : car on ſait par les Théories de l'Hydroſtatique, que les couches de niveau reſteront les mêmes dans l'atmoſphere homogene & dans l'atmoſphere hétérogene, abſtraction faite de l'attraction de l'atmoſphere, dont l'effet eſt ici fort petit. Ainſi on peut appliquer à l'atmoſphere hétérogene, telle qu'elle eſt réellement, tout ce que nous avons dit juſqu'ici, & tout ce que nous dirons par la ſuite, dans l'hypothèſe de l'atmoſphere homogene.

16. Pour avoir maintenant la figure de l'atmoſphere,

après en avoir fixé la hauteur, ſoit un rayon quelconque $CO = x$ (Fig. 43), l'angle $OCB = z$; & on aura, à cauſe de l'équilibre des canaux KO, BP, & du niveau des ſurfaces BO, PK, l'équation $\frac{M}{x} - \frac{Mx^2 \text{ ſin. } z^2}{2a^3 r^3} = \frac{M}{c}$, ou $\frac{x^3 \text{ ſin. } z^2}{2a^3 r^3} - \frac{x}{c} + 1 = 0$.

17. Donc lorſque z ſera égal à 90°, ſi on prend un angle z qui ne ſoit au-deſſous de 90° que d'une quantité infiniment petite, il eſt aiſé de voir que la valeur de x, correſpondante à cette valeur de z, ne différera que d'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, de la valeur de x répondante à $z = 90°$, & qu'ainſi la ſurface de l'atmoſphere fera un angle droit en A avec le rayon CA.

18. On trouvera de même que lorſque $z = 0$, c'eſt-à-dire, au point B, les deux valeurs de x infiniment proches ne différeront que d'un infiniment petit du ſecond ordre, & qu'ainſi l'angle en B ſera droit.

19. De-là il s'enſuit que ni au point A ni au point B (Fig. 44) la ſurface de l'atmoſphere ne peut ſe terminer en pointe, & qu'ainſi il eſt impoſſible qu'elle ait la forme d'une lentille dont le tranchant réponde à l'équateur A; ce qu'il eſt d'ailleurs aiſé de démontrer directement, en conſidérant que ſi l'angle en A étoit aigu, il le ſeroit auſſi au point a infiniment proche de a; d'où il s'enſuivroit que la direction de la peſanteur

teur combinée avec la force centrifuge en a, ne pourroit être perpendiculaire à la ſurface du fluide en a, comme elle le doit être pour l'équilibre.

20. Si donc il eſt vrai, comme les Obſervateurs l'aſſurent, que la lumiere zodiacale qu'on obſerve autour du Soleil dans certains temps de l'année, ſe termine par une pointe A, qui forme un angle aigu d'un nombre plus ou moins grand de degrés, il eſt clair que cette lumiere zodiacale ne peut avoir pour cauſe l'atmoſphere du Soleil, comme l'ont cru des Savans célèbres. Voyez le *Traité de l'Aurore Boréale* de M. de Mairan, ſeconde Edit. 1754, pag. 20 & ſuiv.

21. Si on mene Co infiniment proche de CO (Fig. 43), il n'eſt pas difficile de voir que le petit cône formé par la révolution du triangle COo autour de CB ſera $\frac{x \text{ cof. } z}{3} \times 2\pi x \text{ ſin. } z \times o\lambda$, $o\lambda$ étant parallèle à CA, & 2π étant le rapport de la circonférence au rayon; or il eſt aiſé de voir encore que $o\lambda = \frac{x\,dz}{\text{cof. } z}$; donc l'élément dont il s'agit ſera $\frac{2\pi x^3}{3} \times dz \text{ ſin. } z = \frac{2\pi x^3}{3} \times -d(\text{cof. } z)$. Or puiſqu'on a ſin. $z^2 = -\frac{2a^3r^3}{x^3} + \frac{2a^3r^3}{6x^2}$, on aura cof. $z = \sqrt{(1 + \frac{2a^3r^3}{x^3} - \frac{2a^3r^3}{6x^2})}$; donc ſuppoſant $x = \frac{1}{u}$, l'intégration de cet élément dépendra de celle de $\frac{Au^2du + Budu}{u^3\sqrt{(a + bu^2 + cu^3)}}$

ou $\frac{du}{u\sqrt{(a+bu^2+cu^3)}}$ & $\frac{du}{u^2\sqrt{(a+bu^2+cu^3)}}$. Or (*Mém. de Berl.* 1748, p. 251, *coroll.* 1) la ſeconde de ces deux différentielles ne dépend que de la rectification des ſections coniques. Donc l'intégration de l'élément dont il s'agit, dépend de l'intégration de la différentielle $\frac{du}{u\sqrt{(a+bu^2+cu^3)}}$, c'eſt-à-dire (*Mém. de Berl.* 1748, p. 254), de la quadrature d'une courbe du troiſiéme ordre, qui auroit pour équation $z\,yy = a'z^3 + b'z + c'z$; d'où il eſt évident que ſi la maſſe de l'atmoſphere eſt ſuppoſée $= \frac{2\pi\delta^3}{3}$, on ne pourra déterminer les valeurs de ω & de ζ que par les intégrations dont on vient de parler; car une des deux quantités ω & ζ ne peut ſe déterminer qu'en ſuppoſant la maſſe de l'atmoſphere connue & $= \frac{2\pi\delta^3}{3}$. Cette équation, jointe à celle de l'*art.* 5, pag. 340, donnera la valeur de ζ & celle de ω en δ.

22. Dans le cas où l'équation $\frac{\omega^3}{2a^3r^3} - \frac{\omega}{\zeta} + 1 = 0$ a deux racines réelles poſitives, la courbe dont l'équation eſt $\frac{x^3 \text{ ſin. } z^2}{2ar^3} - \frac{x}{\zeta} + 1 = 0$, doit avoir à peu près la forme repréſentée dans la Figure 45, & elle ſera formée d'une ovale $ABaQ$, dont les deux parties ABa, AQa ſeront ſemblables & égales, & de deux courbes VRT, urt, ſemblables toutes

deux, & compoſées de deux parties ſemblables RV, RT, ru, rt; la ligne CB ſera $= \zeta$, $CA =$ à la plus petite valeur de ω, CR à la plus grande. Mais il eſt clair (*art.* 12) que les parties de la courbe RV, RT, ru, rt, ſont inutiles au problême.

23. Au reſte, les lignes ML, ml ſeront les aſymptotes des courbes VRT, urt; & pour déterminer CS ou Cs, on fera attention que quand x eſt infini, & ſin. $z = 0$ ou infiniment petit, on a x ſin. $z = CS$, & que l'équation $\frac{x^3 \text{ ſin. } z^2}{2a^3 r^3} - \frac{x}{\zeta} + 1 = 0$ ſe change en $\frac{CS^2}{2a^3 r^3} - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{x} = 0$, ou $\frac{CS^2}{2a^3 r^3} - \frac{1}{\zeta} = 0$, à cauſe de x infinie; d'où il s'enſuit que $CS^2 = \frac{2a^3 r^3}{\zeta}$. Il eſt clair que CS eſt plus grande que l'une & l'autre des deux racines poſitives & réelles CA, CR, de l'équation en ω. Car on a $\frac{\omega^2}{2a^3 r^3} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\zeta} = \frac{CS^2}{2a^3 r^3}$. Donc $CS^2 > \omega^2$ & $CS > \omega$; c'eſt-à-dire, $CS > CA$, & $> CR$.

24. Si on appelle CP, z', & PO, y, & qu'on ſubſtitue $\sqrt{(z'z' + yy)}$ à la place de x, on trouvera, après avoir fait évanouir les radicaux, une équation du ſixiéme degré, analogue à celle qu'on peut voir dans le *Traité de l'Aurore Boréale* de M. de Mairan, p. 329, Edit. de 1754; & cette équation donneroit, outre les différentes parties de la courbe trouvées dans l'*art.* 22, une nouvelle partie KNZ.

25. Il n'eſt pas difficile de prouver que la ligne CN eſt égale à la racine négative, priſe poſitivement, de l'équation en α. En effet, quand on met $\sqrt{(\zeta'\zeta'+yy)}$ à la place de x, il eſt clair qu'à cauſe de l'équivoque du ſigne de $\sqrt{(\zeta'\zeta'+yy)}$, l'équation réſultante en ζ' & en y, après avoir ôté les radicaux, ſatisfait à la double équation $\frac{-M}{\pm\sqrt{(\zeta'\zeta'+yy)}} - \frac{M.\zeta'\zeta'}{2a^3r^3} = \frac{M}{\zeta}$, ou $\frac{-M}{\pm x} - \frac{Mx^2 \text{ ſin. } \zeta^2}{2a^3r^3} = -\frac{M}{\zeta}$, laquelle devient (lorſque $\zeta = 90°$) $\frac{M}{\pm x} + \frac{Mx^2}{2a^3r^3} = \frac{M}{\zeta}$. Or de ces deux équations, il n'y a que la premiere, c'eſt-à-dire, celle où x a le ſigne $+$, qui donne la figure de l'atmoſphere; cependant l'autre, comme il eſt aiſé de le voir, n'en differe que par les ſignes pairs, & par conſéquent elle a deux racines négatives, & une poſitive, égales aux deux racines poſitives & à la racine négative de l'autre. Donc CN eſt cette racine poſitive, égale à la négative de l'autre équation, & par conſéquent $= CA + CR$. D'où il eſt clair que $CA + CR = CA + AN$, & qu'ainſi $AN = CR$ ou $RN = CA$.

26. Il réſulte de-là, que pour déterminer la figure de l'atmoſphere, c'eſt une analyſe tout-à-fait illuſoire que de ſubſtituer $\sqrt{(\zeta'\zeta'+yy)}$ à x; & qu'il faut laiſſer l'équation ſous la forme $\frac{1}{x} + \frac{x^2 \text{ ſin. } \zeta^2}{2a^3r^3} = \frac{1}{\zeta}$; x étant le rayon variable CO, & OCB l'angle ζ. On

peut même tirer de-là en général une conclusion purement Géométrique ; c'est que quand une courbe est exprimée par l'équation entre les coordonnées polaires, c'est-à-dire, entre les angles z (ou leurs sinus & cosinus) & les rayons x qui partent d'un point fixe, il ne faut point substituer $\sqrt{(z'z' + yy)}$ à x, à moins que x ne se trouve dans l'équation à des puissances purement paires ; autrement, on auroit une courbe plus composée que celle dont il s'agit, comme il arrive dans le cas présent, où la courbe qui a pour ordonnées z' & y, représente à-la-fois les deux courbes $\frac{1}{x} + \frac{x^2 \text{ sin. } z^2}{2a^3 r^3} = \frac{1}{C}$, & $-\frac{1}{x} + \frac{x^2 \text{ sin. } z^2}{2a^3 r^3} = \frac{1}{C}$.

27. Dans le cas où les deux racines de l'équation en ω sont égales, les points A, R se confondent, & pour lors $CR = ar$, $CB = \frac{2}{3}ar$, $CS^2 = \frac{2a^3 r^3}{C} =$ (*art.* 13) $3a^2 r^2$; & $CS = ar\sqrt{3}$.

28. Cette nouvelle courbe, dans laquelle $CA = CR$, doit être perpendiculaire à CA au point A, comme il résulte de l'*art.* 19. Ainsi elle ne paroît pas assez exactement tracée dans la Fig. 34 du *Traité de l'Aurore Boréale.*

29. Nous pouvons ajouter que la Fig. 35 du même Ouvrage, qui répond au cas de l'*art.* 7 & à l'équation seule $\frac{M}{-x} + \frac{Mx^2}{2a^3 r^3} = \frac{M}{C}$ (équation qui n'est pas la vraie), ne peut être non-seulement d'aucune utilité, mais même d'aucune considération dans la détermination

de la hauteur & de la figure de l'atmoſphere. Cette figure d'ailleurs appartient (*art.* 7) au cas de $m < 1$, qui eſt illuſoire (*art.* 9), puiſqu'il donne $p > \frac{2a}{3}$, & le problême impoſſible. Ainſi M. Euler a eu raiſon de dire que ſi l'équation de l'*art.* 6 a une racine poſitive, elle aura néceſſairement trois racines réelles; & M. de Mairan s'eſt trompé, ce me ſemble, quand il l'a repris ſur cet article, p. 329 du *Traité de l'Aurore Boréale.* Car quand les deux racines ſont imaginaires, dans le préſent problême, la troiſiéme (*art.* 7) eſt négative & non poſitive; & la recherche de la hauteur de l'atmoſphere eſt abſolument illuſoire & impoſſible. Mais, d'un autre côté, M. de Mairan a remarqué, ce me ſemble, avec raiſon, contre M. Euler, que dans le cas même des trois racines réelles, dont deux CA, CR ſont poſitives, la plus grande CR eſt illuſoire pour trouver la hauteur de l'atmoſphere.

30. Nous avons fait abſtraction juſqu'ici de l'action des autres Planetes ſur l'atmoſphere d'une Planete donnée. Soit préſentement S (Fig. 46) un corps céleſte qui agiſſe ſur l'atmoſphere de la Planete PEp, & ſoit $CS = \delta$, $CA = \omega$ comme ci-deſſus, l'action au point A vers AS ſera $\frac{S}{(\delta - \omega)^2}$, de laquelle il faut retrancher l'action $\frac{S}{\delta^2}$ ſur le centre de la Planete PEp, & enſuite retrancher le tout de l'action $\frac{M}{\omega^2}$ de la Pla-

nete ; ce qui donnera $\frac{M}{\omega^2} - \frac{S}{(\delta - \omega)^2} + \frac{S}{\delta^2} = \frac{M\omega}{a^3 r^3}$, pour l'équation qui détermine le point A de la plus grande hauteur de l'atmoſphere.

31. Suppoſant donc ω très-petit par rapport à δ, on aura $\frac{M}{\omega^2} - \frac{2S\omega}{\delta^3} - \frac{M\omega}{a^3 r^3} = 0$.

32. Si le point A étoit en a de l'autre côté de S, il faudroit, au lieu de retrancher de $\frac{M}{\omega^2}$ la force $\frac{S}{(\delta - \omega)^2} - \frac{S}{\delta^2}$, y ajouter la force $\frac{S}{(\delta + \omega)^2} - \frac{S}{\delta^2}$, ce qui donneroit le même réſultat.

33. Si M eſt la Terre, S le Soleil, δ le rayon du grand orbe, ou la diſtance du Soleil à la Terre, ρ le rayon de l'orbite lunaire, on aura $a^3 = 289$; & $\frac{M}{\omega^2} - \frac{M\omega}{289 r^3} - \frac{2\omega}{\rho} \times \frac{S\rho}{\delta^3} = 0$. Or $\frac{S\rho}{\delta^3} : \frac{M}{\rho^2} :: 1 : 178\frac{3}{4}$, & $\rho = 60r$; donc $\frac{1}{\omega^2} - \frac{\omega}{289 r^3} - \frac{2\omega}{60^3 r^3 . 178\frac{1}{4}} = 0$.

34. D'où il eſt clair que la hauteur ω de l'atmoſphere eſt à peu près la même que ſi le Soleil n'agiſſoit pas. Car ſi le Soleil n'agiſſoit pas, on n'auroit que les deux premiers termes de l'équation précédente ; & le troiſiéme terme eſt très-petit par rapport au ſecond ; donc, &c.

35. Si on avoit encore égard à l'action de la Lune,

on trouveroit qu'il faudroit ajouter à l'équation précédente le terme $-\frac{2Lw}{\varsigma^3}$, L étant la masse de la Lune; or ce terme est $= -\frac{2Mw}{80.60^3 r^3}$, & par conséquent encore très-petit par rapport à $\frac{Mw}{289r^3}$. Ainsi ni l'action du Soleil ni celle de la Lune ne peuvent influer beaucoup sur la hauteur de l'atmosphere.

36. Si la Planete M est la Lune & S la Terre, on remarquera que la Lune tournant sur elle-même dans le même temps qu'elle tourne autour de la Terre, la force centrifuge du centre de la Lune, c'est-à-dire, $\frac{T}{\delta\delta}$ (je mets ici T au lieu de S), est à la force centrifuge d'un point de sa surface, comme les rayons des cercles qu'ils décrivent, c'est-à-dire, comme δ est à r; donc $\frac{M}{\omega^3 rr} = \frac{T}{\delta\delta} \times \frac{r}{\delta}$; donc $\frac{M}{\omega^2} - \frac{Tw}{\delta^3} - \frac{2Tw}{\delta^3} = 0$. Or si on faisoit abstraction de l'action de la Terre, on auroit simplement $\frac{M}{\omega^2} - \frac{Tw}{\delta^3} = 0$; d'où l'on voit que dans ce dernier cas on a $\omega^3 = \frac{M\delta^3}{T} =$ environ $\frac{\delta^3}{80}$, & que dans l'autre on a $\omega^3 = \frac{M\delta^3}{3T}$, & par conséquent ω beaucoup plus petit. Donc l'action de la Terre peut influer très-considérablement sur la hauteur de l'atmosphere lunaire; ensorte

que

que l'action de la Terre peut diminuer beaucoup la plus grande étendue poſſible de l'atmoſphere de la Lune.

37. On peut remarquer en paſſant, qu'abſtraction faite de l'action du Soleil & de la Lune, la hauteur de l'atmoſphere terreſtre eſt à peu près $r\sqrt[3]{V}$ (289); & celle de l'atmoſphere lunaire $\delta\sqrt[3]{V}\left(\frac{1}{3.80}\right)$ ou $60r\sqrt[3]{V}\left(\frac{1}{3.80}\right)$ = à peu près $\frac{60r}{7}$. La hauteur de l'atmoſphere terreſtre ſera donc à celle de la Lune (abſtraction faite de l'action des Planetes extérieures) à peu près comme 50 à 60, ou comme 5 à 6.

38. On a ſuppoſé dans le calcul de l'*art.* 36, que la Terre répondoit à l'équateur de la Lune. Si elle répondoit au pole, c'eſt-à-dire, ſi elle ſe trouvoit dans l'axe de la Lune prolongé, alors il eſt aiſé de voir qu'au lieu de la force $-\frac{2T\omega}{\delta^3}$, il faudroit ajouter à $\frac{M}{\omega^2}$ dans l'*art.* 36 la force $\frac{T\omega}{\delta^3}$; ce qui donneroit $\frac{M}{\omega^2} = 0$; & $\omega = \infty$. Ainſi dans cette ſuppoſition, l'atmoſphere de la Lune pourroit avoir ſous l'équateur une hauteur indéfinie; au moins en faiſant abſtraction de l'équilibre qui doit être d'ailleurs entre les colonnes de l'équateur & du pole. Au reſte, cette ſuppoſition, que la Terre ſe trouve dans l'axe de la Lune, n'a point lieu dans notre ſyſtême céleſte; car comme l'orbite de la Lune eſt fort inclinée à l'Ecliptique, & que l'axe de la Lune eſt preſque perpendiculaire à cette même Ecliptique, le centre

de la Terre ſe trouve toujours à peu près dans le plan de l'équateur lunaire.

39. Si on avoit égard à l'action du Soleil pour déterminer la plus grande hauteur poſſible de l'atmoſphere lunaire, on verroit facilement que le Soleil répondant toujours à peu près, ainſi que la Terre, au plan de l'équateur lunaire, il faudroit (en ſuppoſant le Soleil en conjonction avec la Terre par rapport à la Lune) ajouter à l'équation de l'*art.* 36 le terme $-\frac{2S\omega}{\Delta'^3}$, Δ' étant la diſtance du Soleil à la Lune, c'eſt-à-dire, à la Terre à très-peu près. Or $\frac{S}{\Delta'^3} : \frac{T}{\Delta^3}$ à peu près comme $1 : 178\frac{1}{4}$; d'où l'on voit que le terme $-\frac{2S\omega}{\Delta'^3}$ eſt très-petit par rapport à $-\frac{2T\omega}{\Delta^3}$, & par conſéquent influera peu ſur la valeur de ω.

40. Dans les Recherches précédentes ſur la plus grande hauteur de l'atmoſphere en ayant égard à l'action des Planetes extérieures, nous nous ſommes bornés à chercher le terme de cette plus grande hauteur. Nous allons préſentement déterminer la figure de l'atmoſphere, en ayant égard à l'action de la Planete S.

41. Pour faciliter cette Recherche, il faut d'abord ſuppoſer cette Planete dans l'axe de rotation QCB (Fig. 47), afin que les méridiens ſoient ſemblables; enſuite on conſidérera que le point R eſt tiré vers C par une force $= \frac{S.CR}{CS^3}$, & parallèlement à CS par

une force $= -\frac{3\,S.CR\,\text{cos.}\,OCB}{CS^3}$, d'où réſulte ſuivant RO une force $= -\frac{3\,S.CR\,\text{cos.}\,OCB^2}{CS^3}$; ainſi la force totale de R vers C eſt $\frac{S.CR}{CS^3}(1 - 3\,\text{cos.}\,OCB^2)$. De-là il eſt aiſé de voir que l'équation de l'équilibre d'où réſulte la figure de l'atmoſphere, ſera $-\frac{M}{x} - \frac{Mx^2\,\text{ſin.}\,z^2}{2a^3r^3} + \frac{Sx^2}{2\delta^3}(1 - 3\,\text{cos.}\,z^2) = -\frac{M}{\zeta} + \frac{S\zeta^2}{2\delta^3} \times -2$; équation qui n'eſt guères plus compliquée que celle de l'*art.* 16.

42. Pour que x ſoit $= \zeta$ lorſque $z = 90°$, il faut que $-\frac{M}{2a^3r^3} + \frac{S}{2\delta^3} \times 1 = -\frac{S}{\delta^3}$ ou $\frac{M}{a^3r^3} = \frac{3S}{\delta^3}$. Dans cette ſuppoſition, il eſt aiſé de voir que x ſera $= \zeta$ quel que ſoit z, puiſqu'on aura $-\frac{M}{x} - \frac{Mx^2}{2a^3r^3} + \frac{Mx^2}{3.2a^3r^3}$ ou $-\frac{M}{x} - \frac{Mx^2}{3.a^3r^3}$ égal à la quantité $-\frac{M}{\zeta} - \frac{M\zeta^2}{3a^3r^3}$, ce qui donne $x = \zeta$; donc alors l'atmoſphere ſera ſenſiblement ſphérique. Je dis *ſenſiblement*; car les valeurs ſuppoſées ci-deſſus aux forces que la Planete S exerce ſur le point R, ne ſont pas rigoureuſement exactes. *V. ci-deſſus* p. 156, *Note* (*l*).

43. Pour déterminer en général la figure de l'atmoſphere, en ſuppoſant la Planete attirante par-tout où

l'on voudra, il faut d'abord ſuppoſer un plan $BVGQ$ (Fig. 48) qui paſſe par la Planete attirante S, & par l'axe de rotation BQ de la Planete attirée; il faut enſuite imaginer un méridien BOQ, dont le plan faſſe avec le plan $BVGQ$ un angle $= \alpha'$; prenons maintenant ſur ce méridien un point O, tirons CO & nommons l'angle BCO, ζ'; ſi après avoir tracé le demi-cercle $BO'Q$ dans le plan BOQ, on mene du point O' une perpendiculaire au plan $BVGQ$, laquelle tombe au point K ſur ce plan $BVGQ$, & que de ce point K on mene dans le même plan $BVGQ$ la ligne KN perpendiculaire à CV, il eſt très-aiſé de faire voir que CN ſera le coſinus de l'angle OCS que j'appelle ζ.

44. On aura de plus $KL = \text{ſin. } \zeta' \text{ coſ. } \alpha'$; $CL = \text{coſ. } \zeta'$, & en nommant $\mathfrak{C}'$ l'angle BCV, CN ou coſ. OCS ou coſ. $\zeta = \text{coſ. } \zeta' \text{ coſ. } \mathfrak{C}' + \text{ſin. } \zeta' \text{ coſ. } \alpha' \text{ ſin. } \mathfrak{C}'$, après quoi il n'y aura qu'à ſubſtituer cette valeur au lieu de coſ. ζ dans l'équation de l'*art.* 41, & en même-temps ſin. ζ' au lieu de ſin. ζ, & on aura $-\frac{M}{x} - \frac{Mx^2 \text{ ſin. } \zeta'^2}{2\alpha^3 r^3} + \frac{Sx^2}{2\delta^3}[1 - 3(\text{coſ. } \zeta' \text{ coſ. } \mathfrak{C}' + \text{ſin. } \zeta' \text{ coſ. } \alpha' \text{ ſin. } \mathfrak{C}')^2] = -\frac{M}{\mathfrak{C}} + \frac{S\mathfrak{C}^2}{2\delta^3} \times (1 - 3 \text{ coſ. } \mathfrak{C}'^2)$. D'où l'on tirera la valeur de x en ζ', ou celle de ζ' en x, α' & $\mathfrak{C}'$ étant donnés.

45. S'il y avoit un autre corps attirant S', placé à la diſtance δ', qui fît avec l'axe BC un angle $\mathfrak{C}''$, le problême ne ſeroit pas plus difficile, & il ſuffiroit d'a-

joutèr au premier membre de l'équation les termes $\frac{Sx^2}{2\delta^3} \times [1 - 3(\text{cof. } \zeta' \text{ cof. } \mathfrak{C}'' + \text{ſin. } \zeta' \text{ ſin. } \alpha'' \text{ ſin. } \mathfrak{C}'')^2]$, & au ſecond membre les termes $\frac{S\mathfrak{C}^2}{2\delta^3} - \frac{3S\mathfrak{C}^2 \text{ cof. } \mathfrak{C}''^2}{2\delta^3}$.

On remarquera de plus que ſi ε eſt l'angle connu que forment entr'eux les deux plans qui paſſent par l'axe BQ & par les corps attirans S, S', on peut ſuppoſer $\alpha'' = \alpha' + \varepsilon$, & par conſéquent cof. $\alpha'' =$ cof. α' cof. $\varepsilon -$ ſin. α' ſin. ε, & ſin. $\alpha'' =$ ſin. α' cof. $\varepsilon +$ ſin. ε cof. α'.

46. Je joindrai ici en finiſſant les deux remarques ſuivantes. Une atmoſphere qui enveloppperoit entiérement la Planete, & qui ne commenceroit qu'à une certaine diſtance, enſorte qu'il y eût un vuide entre la ſurface de la Planete & la couche inférieure de ſon atmoſphere, ne ſauroit exiſter. Car la colomne du pole de cette atmoſphere n'ayant point de force centrifuge, cette colomne auroit néceſſairement de la peſanteur vers le centre de la Planete, & par conſéquent retomberoit vers la Planete; il faudroit donc, comme dans la Fig. 43, que la colomne en B & en Q fût $= 1$; enſorte que les couches ſupérieure & inférieure QMA, Qma, partiroient du même point commun Q, placé dans le prolongement de l'axe de rotation de la Planete. Mais cela ne ſe peut encore; car alors les deux ſurfaces QM, Qm devant être de niveau, le poids de Mm ſeroit $= 0$, c'eſt-à-dire, le poids de CM égal à celui de Cm (en imaginant pour un moment l'atmoſphere continuée juſ-

qu'à la Planete). On auroit donc pour un même angle $QCM(\zeta)$, deux valeurs de CM, ou x, qui ſeroient égales en faiſant $\zeta = 0$. Or l'analyſe expoſée dans ce Mémoire prouve que cela eſt impoſſible. En effet, ſoit $CM = x$, le poids d'une colomne CM ſeroit repréſenté par une quantité de cette forme $\frac{1}{o} - \frac{1}{x} - xx$ ſin. $\zeta^2 . A$; & faiſant $Cm = x'$, le poids de cm ſeroit $= \frac{1}{o} - \frac{1}{x'} - Ax'x'$ ſin. ζ^2; on auroit donc $\frac{1}{x} - Axx$ ſin. $\zeta^2 = \frac{1}{x'} - Ax'x'$ ſin. ζ^2, équation impoſſible à moins que ſin. ζ ne ſoit $= 0$, ce qui donnera $x = x'$. Dans tout autre cas ſoit $x' = x - a$, on aura $o = \frac{a}{x(x-a)} + 2Axa$ ſin. $\zeta^2 - Aaa$ ſin. ζ^2; équation impoſſible, puiſque a eſt poſitif & $< x$; & qu'ainſi le ſecond membre eſt poſitif.

47. Je remarquerai encore à cette occaſion que la formation de l'anneau de Saturne imaginée par M. de Maupertuis (*Fig. des Aſtres*, ſeconde Edition, p. 126), ne peut avoir lieu que dans l'hypothèſe purement mathématique & précaire, que chaque centre d'attraction n'agiſſe que dans le plan du méridien où il eſt placé; d'où il s'enſuit que cette explication, d'ailleurs ingénieuſe, ne peut être admiſe dans le ſyſtême réel de l'attraction générale & mutuelle de toutes les parties de l'anneau, & que pour appliquer alors cette explication, il faudroit s'aſſurer qu'un tel fluide, concentrique à la

Planete, & ſuſpendu autour d'elle en forme d'anneau, peut avoir, dans cette hypothèſe, une figure d'équilibre poſſible, c'eſt-à-dire, telle que la peſanteur ſoit perpendiculaire à la ſurface; & c'eſt ce qui n'eſt pas auſſi facile à prouver dans le ſyſtême de l'attraction des parties, que dans celui de leur tendance vers un ou pluſieurs centres.

48. On peut même remarquer que ſi l'anneau étoit plan, de figure d'ailleurs quelconque, & placé dans le plan de l'équateur, ou autrement, il ne pourroit y avoir d'équilibre; car la peſanteur ou force qui agiroit dans le plan de l'anneau, produiroit par les loix de l'hydroſtatique, ſur chaque partie du fluide, une preſſion latérale & dirigée hors du plan de l'anneau, laquelle preſſion n'étant point ſoutenue par une force contraire, puiſque (*hyp.*) l'anneau eſt plan, ou même ſi l'on veut, ſolide, & terminé par une ſurface plane, il en réſulteroit la deſtruction de l'équilibre; par la même raiſon qu'une colomne verticale de fluide s'affaiſſe & ſe détruit, ſi l'action que le fluide exerce latéralement n'eſt point ſoutenue par des parois ſolides.

LI. MÉMOIRE.

Recherches ſur différens Sujets.

§. I.

Nouvelle démonſtration du Parallélogramme des Forces.

DANS le Mémoire que j'ai donné ſur les principes de la Méchanique (*Vol. de l'Acad.* de 1769, p. 285), j'ai annoncé une nouvelle démonſtration du Parallélogramme des Forces. C'eſt celle que je vais donner ici. Elle eſt à la vérité moins ſimple que la démonſtration qu'on peut lire dans le volume cité; mais comme l'uſage que j'y fais des fonctions pourra être utile dans d'autres problêmes du même genre, j'ai cru que les Géometres ne me ſauroient pas mauvais gré de leur en faire part.

1. Je me bornerai à démontrer que quand deux forces quelconques font un angle droit, la direction de la réſultante doit être la diagonale; car on ſait que toute

la

la difficulté du problême ſe réduit à ce ſeul point, le reſte étant aiſé à trouver & à démontrer. Voyez les *Mém. de Péterſb.* Tom. I.

2. Soit donc BAC (Fig. 49) un angle droit, $AB = a$; $AC = b$ les deux forces, AD la direction de la réſultante, & l'angle $BAD = x$; il eſt clair que cet angle BAD demeurera le même, tant que les forces b, a, garderont entr'elles le même rapport; d'où il s'enſuit que ſi on fait $\frac{b}{a} = z$, le rapport du ſinus de BAD au ſinus de DAC ſera égal à une fonction de z; ce que j'exprime ainſi $\frac{\text{ſin. } x}{\text{ſin. } (90^\circ - x)}$ ou $\frac{\text{ſin. } x}{\text{cof. } x} = \varphi z$, ou tang. $x = \varphi z$.

3. Imaginons de plus ſuivant AC une force $= na$ (n étant un nombre quelconque à volonté) & ſuivant AV une force $= nb$; la réſultante AQ de ces deux forces ſera telle que l'angle QAC ſera évidemment $= BAD = x$; & l'angle DAQ ſera droit.

4. Soit AR la force réſultante des forces totales ſuivant AC & ſuivant AB, c'eſt-à-dire, de $a - nb$, & $b + na$; & ſoit $DAR = x'$; nous aurons (*art.* 2) tang. $(x + x') = \varphi\left(\frac{b+na}{a-nb}\right) = \varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$. D'où l'on tire (en mettant pour tang. $(x + x')$ ſa valeur $\frac{\text{ſin. } (x+x')}{\text{cof. } (x+x')}$ ou $\frac{\text{ſin. } x \text{ cof. } x' + \text{ſin. } x' \text{ cof. } x}{\text{cof. } x \text{ cof. } x' - \text{ſin. } x \text{ ſin. } x'} =$ à la quantité $\frac{\text{ſin. } x}{\text{cof. } x} + \frac{\text{ſin. } x'}{\text{cof. } x'}$, diviſée par $1 - \frac{\text{ſin. } x \text{ ſin. } x'}{\text{cof. } x \text{ cof. } x'}$)

l'équation ſuivante, $\frac{\text{tang.}\,x+\text{tang.}\,x'}{1-\text{tang.}\,x\,\text{tang.}\,x'}=\varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$; donc, en mettant pour tang. x ſa valeur φz, & réduiſant, on aura tang. $x'=\frac{\varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)-\varphi z}{1+\varphi z.\varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)}$.

5. Soit maintenant la force ſuivant $AD=y$, la force ſuivant AQ ſera évidemment $=ny$; & la force ſuivant AR ſera auſſi la réſultante des forces ſuivant AD & ſuivant AQ; d'où il s'enſuit (*art.* 2) qu'on aura tang. DAR ou tang. $x'=\varphi\left(\frac{ny}{y}\right)=\varphi n$.

6. Egalant donc les deux valeurs de tang. x', & réduiſant, on aura $\frac{\varphi z+\varphi n}{1-\varphi z.\varphi n}=\varphi\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$. C'eſt la condition qui doit ſervir à trouver φz.

7. Pour y parvenir, différentions les deux membres de cette équation, en faiſant d'abord varier z, puis en faiſant varier n; nous aurons $\frac{(1+\varphi n^2)}{(1-\varphi z.\varphi n)^2}\times\frac{d\varphi z}{dz}=\frac{(1+n^2)}{(1-nz)^2}\times\Delta\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$; & $\frac{(1+\varphi z^2)}{(1-\varphi z.\varphi n)^2}\times\frac{d\varphi n}{dn}=\frac{(1+z^2)}{(1-nz)^2}\times\Delta\left(\frac{z+n}{1-nz}\right)$. Donc $\frac{1+n^2}{1+z^2}=\frac{(1+\varphi n^2)\frac{d\varphi z}{dz}}{(1+\varphi z^2)\frac{d\varphi n}{dn}}$; ou $\frac{d\varphi z}{1+\varphi z^2}\times\frac{1+z^2}{dz}=\frac{d\varphi n}{1+n^2}\times\frac{1+n^2}{dn}$.

8. Pour ſatisfaire à cette condition d'une maniere

générale, il faut supposer $\frac{d\varphi z}{1+\varphi z^2} = \frac{a\,dz}{1+z^2}$, & $\frac{d\varphi n}{1+\varphi n^2} = \frac{a\,dn}{1+n^2}$, a étant un nombre constant quelconque; ce qui donnera φz égal à la tangente d'un certain angle, lequel sera égal à l'angle dont la tangente est z, ce dernier angle étant multiplié par a.

9. Maintenant il faut considérer que φz doit être telle qu'elle augmente à mesure que z ou $\frac{b}{a}$ augmente. Car supposons que b augmente, a restant le même, c'est-à-dire, qu'on ajoute une force g à la force AC, sans toucher à la force AB; il est clair que cette force nouvelle suivant AC combinée avec la force suivant AD qui résulte déja de a & de b, donnera une force résultante suivant Ad, qui sera évidemment entre AD & AC; d'où il s'ensuit que la résultante Ad des forces a & $b+g$, donnera un angle $dAB > DAB$, & par conséquent que tang. x ou φz augmentera quand z augmentera; & il est de plus visible par la même raison que φz sera toujours positif, tant que z sera positif.

10. Il faut de plus que $z = 1$ donne $\varphi z = 1$; car quand $a = b$, la direction AD de la résultante divise l'angle BAC en deux parties égales.

11. Or pour que ces conditions soient remplies, il faut nécessairement que dans l'*art.* 8, a soit $= 1$. Car il est d'abord aisé de voir que pour que $\varphi z = 1$, lorsque $z = 1$, il faut nécessairement que a soit $= 1$ ou $=$

$1 + 4r$, r étant un nombre entier positif. Ce sont les seuls cas où la tangente de a fois 45° soit égale à cette tangente. En second lieu, supposons $a = 1 + 4r$, & supposons l'angle dont la tangente est z, un peu plus grand que $\frac{90°}{1+4r}$, mais plus petit que 90°; & imaginons de plus que cet angle $\frac{90°}{1+4r} + \alpha$ soit tel que $(1 + 4r)\alpha$ ne soit pas $> 270°$, il sera encore aisé de voir que la tangente de $1 + 4r$ fois cet angle seroit négative; & que par conséquent z croissant, φz ne seroit toujours ni positif ni croissant. Donc a ne sauroit être $= 1 + 4r$. Donc $a = 1$. Donc $\varphi z = z$, & tang. $x = z = \frac{b}{a}$. D'où il est évident que la diagonale AD est la direction de la force résultante. Donc, &c. C. Q. F. D.

Remarque Premiere.

12. La fonction φz doit être telle qu'en mettant $\frac{1}{z}$ au lieu de z, la fonction $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ qui en résultera soit $= \frac{1}{\varphi z}$; car si les forces a & b deviennent b & a, la direction de la résultante AD deviendra $A\delta$, l'angle δAC étant $= BAD$, & $\delta AB = DAC$. Cette condition se trouve évidemment remplie, en supposant $\varphi z = z$; mais je remarquerai en passant (& par forme

de ſimple obſervation analytique) qu'elle pourroit avoir lieu en ſuppoſant à a de certaines valeurs. Car la condition $\frac{d\varphi z}{1+\varphi z^2} = \frac{a\,dz}{1+z^2}$, donne $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+\varphi z\cdot\sqrt{-1}}{1-\varphi z\cdot\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\log.\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$; d'où $\varphi z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\frac{(1+z\sqrt{-1})^a-(1-z\sqrt{-1})^a}{(1+z\sqrt{-1})^a+(1-z\sqrt{-1})^a}\right]$, donc pour que $\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\varphi z}$, il faudra qu'on ait l'équation $\frac{\sqrt{-1}\times[(1+z\sqrt{-1})^a+(1-z\sqrt{-1})^a]}{(1+z\sqrt{-1})^a-(1-z\sqrt{-1})^a} = \frac{(z+\sqrt{-1})^a-(z-\sqrt{-1})^a}{\sqrt{-1}\,[(z+\sqrt{-1})^a+(z-\sqrt{-1})^a]}$; donc en multipliant les deux membres par $\sqrt{-1}$, & diviſant le haut & le bas du premier membre par $(\sqrt{-1})^a$, on aura $-1\times\frac{(z-\sqrt{-1})^a+(-z-\sqrt{-1})^a}{(z-\sqrt{-1})^a-(-z-\sqrt{-1})^a} = \frac{(z+\sqrt{-1})^a-(z-\sqrt{-1})^a}{(z+\sqrt{-1})^a+(z-\sqrt{-1})^a}$. Or il eſt viſible que ces deux membres ſeront identiques, ſi a eſt un nombre entier impair négatif ou poſitif, ou même ſi a eſt une fraction négative ou poſitive, dont le numérateur & le dénominateur ſoient des nombres impairs.

Remarque Seconde.

13. On peut remarquer encore 1°. que ſi dans la valeur de $\varphi z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left[\frac{(1+z\sqrt{-1})^a-(1-z\sqrt{-1})^a}{(1+z\sqrt{-1})^a+(1-z\sqrt{-1})^a}\right]$ on fait $a = 1$, on aura $\varphi z = z$; 2°. que ſi on fait

ſucceſſivement $a = 2, 3, 4, 5$, &c. on aura

$$\varphi z = \frac{z}{1 - zz}$$

$$\varphi z = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}$$

$$\varphi z = \frac{4z - 4z^3}{1 - 6z^2}$$

$$\varphi z = \frac{5z - 10z^3 + z^5}{1 - 10z^2 + 5z^4}, \text{ &c.}$$

D'où il eſt viſible qu'en faiſant $z = 1$, on aura ſucceſſivement $\varphi z = \infty$, $\varphi z = -1$, $\varphi z = 0$, $\varphi z = 1$, & ainſi de ſuite; ce qui confirme ce que nous avons remarqué ci-deſſus *art.* 11, qu'il n'y a que la ſuppoſition de $a = 1 + 4r$ qui donne $\varphi z = 1$ lorſque $z = 1$.

Remarque Troiſième.

14. On trouve dans le *Journal des Savans* de Juin 1764, ſecond Vol. une démonſtration très-ingénieuſe & très-ſimple du Parallélogramme des Forces. L'Auteur s'y borne à prouver, comme nous venons de faire, que dans un parallélogramme rectangle la réſultante aura pour direction la diagonale. Pour cela il remarque que le rapport des ſinus des deux angles dans leſquels l'angle droit doit être diviſé par cette réſultante, doit être une *fonction des vîteſſes*, il auroit pu même dire une *fonction du rapport des vîteſſes*, puiſque ce rapport demeurant le même, la direction de la réſultante demeure la même. Mais ce même Auteur ſuppoſe que ſi dans

un cas la fonction qui exprime le rapport des ſinus eſt plus grande ou plus petite que le rapport inverſe des vîteſſes, elle le doit être dans tout autre cas; or c'eſt ce qui ne paroît pas aſſez rigoureuſement démontré. On voit bien que φz doit être d'autant plus grand que z eſt plus grand, mais on ne voit pas de même ſans démonſtration, que ſi φz eſt $<$ ou $>$ z dans un cas, il le doit être dans tous les autres. On voit bien auſſi (*art.* 10 & 12) que $z = 1$ doit rendre $\varphi z = 1$, & que $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ doit être $= \frac{1}{\varphi z}$. Or ces conditions pourroient être remplies en ſuppoſant, par exemple, $\varphi z = z^m$, m étant un nombre poſitif; car z croiſſant, φz croîtra; $z = 1$, donnera $\varphi z = 1$, & $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$ ou $\varphi(z^{-1})$ ſera $= z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\varphi z}$. Il reſte donc à démontrer que φz doit être toujours $>$ ou $< z$, s'il eſt $>$ ou $< z$ dans un ſeul cas; & c'eſt à quoi notre analyſe ſatisfait, ou plutôt c'eſt une difficulté que notre analyſe évite, en faiſant voir que φz doit toujours être $= z$.

Remarque Quatrième.

15. J'obſerverai encore ici, à l'occaſion de la Remarque premiere, que pour trouver une fonction y de z, telle qu'en mettant $\frac{1}{z}$ au lieu de z, la fonction qui en viendra ſoit $= \frac{1}{y}$, il n'y a qu'à ſuppoſer une

équation dans laquelle y & $\frac{1}{y}$, z & $\frac{1}{z}$ entrent de la même maniere; & ſi de plus on veut que cette fonction ſoit telle que $z = 1$, rende $y = 1$, il ſera encore aiſé de ſatisfaire à cette condition, en mettant dans l'équation 1 pour z & 1 pour y, & ſuppoſant la ſomme des coefficiens $= 0$. Par exemple, l'équation $Ay + \frac{A}{y} + Bz^2 + \frac{B}{z^2} + Cz + \frac{C}{z} = 0$, ſatisfera à cette condition ſi $A + B + C = 0$. Mais il eſt plus difficile de remplir la condition que z croiſſant, y croiſſe. C'eſt une recherche à laquelle nous ne nous occuperons point ici, parce qu'elle n'eſt pas de notre ſujet.

Remarque Cinquiéme.

16. Dans la démonſtration précédente nous ſuppoſons que ſi un corps tend à ſe mouvoir ſuivant la même direction avec deux vîteſſes à-la-fois, dont l'une ſoit $= f$, & l'autre $= b$, il ſe mouvra avec la vîteſſe $f + b$. Quoique cette propoſition ſoit aſſez claire par elle-même pour n'avoir pas beſoin de démonſtration, cependant on peut en donner la ſuivante. Soit g la vîteſſe qui réſulte des deux vîteſſes f & b, il eſt évident 1°. que g ne pourra être qu'une fonction de f & de b. 2°. Que dans cette fonction f & b doivent y entrer de la même maniere, enſorte que ſi on met b pour f & f pour b, la fonction demeure la même; en effet, qu'on mette la puiſſance b à la place de f,

& f à la place de b, la réſultante g ſera évidemment la même. 3°. Que cette valeur de g doit être en raiſon conſtante avec f & avec b, tant que le rapport de f à b reſtera le même; car il eſt clair que ſi f & b devenoient doubles, par exemple, g deviendroit double; que s'ils étoient triples, g deviendroit triple, & ainſi du reſte. D'ailleurs il eſt évident que la puiſſance g ne devant réſulter que des ſeules puiſſances f, b, l'équation entre g, f, b, ne doit contenir aucune autre quantité que g, f, b; d'où il s'enſuit que cette équation ſera homogene, & que par conſéquent elle pourra ſe diviſer par une puiſſance de f. Donc ſi on fait $g = mf$, & $b = nf$, on aura une équation entre m & n. Donc $m = \varphi n$, & $g = f\varphi n$; or au lieu de φn on peut écrire $\Delta(1+n)$; car ſi dans φn, on écrit au lieu de n, $k-1$, cette quantité deviendra une fonction Δk de k, & ſi enſuite au lieu de k on écrit $1+n$ dans Δk, cette quantité Δk deviendra $\Delta(1+n)$. Donc $g = f\Delta(1+n)$. Par la même raiſon $g = b\Delta\left(1+\frac{1}{n}\right)$, en mettant b pour f, & $\frac{1}{n}$ ou $\frac{f}{b}$ au lieu de n ou $\frac{b}{f}$. Donc $f\Delta(1+n) = b\Delta\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ou $\Delta(1+n) = n\Delta\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ou $\frac{\Delta(1+n)}{n} = \Delta\left(\frac{1+n}{n}\right)$, ou en faiſant $1+n = m$, $\Delta\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\Delta m}{n}$; ſoit $\frac{m}{n} = t$;

on aura $\Delta t = \frac{t\Delta m}{m}$, ou $\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta m}{m}$, m & t étant tout ce qu'on voudra ; or cette équation ne peut avoir lieu à moins que Δt ne ſoit $= At$, A étant une conſtante. On aura donc $g = Af(1+n) = Af + Ab = A(f+b)$; & par la même raiſon ſi le corps avoit à-la-fois trois vîteſſes f, b, c, on auroit $g = A(f+b) + Ac = A(f+b+c)$; or ſi le corps avoit à-la-fois les trois vîteſſes $f, +b$, & $-b$, il eſt évident que g ſeroit $= f$, & que de plus on auroit pour lors $g = A(f+b-b) = Af$. Donc en comparant les deux valeurs de g, on auroit $f = Af$, donc $A = 1$. Donc g eſt en général $= f(1+n) = f+b$.

17. Pour prouver que $g = f+b$, on peut conſidérer encore que ſi la vîteſſe g eſt réſultante de f & de b, donc la vîteſſe g ſera équilibre aux vîteſſes $-f, -b$; donc puiſque f fait équilibre à $-f$, il eſt clair que f ſera la réſultante de g & de $-b$. Si donc on ſuppoſe $g = \Delta(f, +b,)$ on aura par la même raiſon $f = \Delta(g, -b)$. Donc puiſque $g = Af + Ab$, on aura $f = Ag - Ab$. Donc $\frac{g-Ab}{A} = Ag - Ab$, quels que ſoient g & b ; donc $A^2 = 1$, & $-A^2 = -A$, donc $A = 1$.

§. II.

Sur l'Equilibre du Levier.

1. J'ai dit (*Mém. de l'Acad.* 1769, pag. 285) qu'il

y avoit beaucoup d'analogie entre la Théorie du Parallélogramme des Forces & celle de l'Equilibre dans le Levier; ce qui ne paroîtra pas ſurprenant, ſi d'après la méthode de M. Varignon, on applique au Levier le principe du Parallélogramme. Mais on peut encore s'en aſſurer plus directement par les conſidérations ſuivantes.

2. Soit $AC = x$, $BC = CD = y$ (Fig. 50), & ſoient priſes de l'autre côté du point A, $Ab = AB$, $bc = cd = BC = CD$. Imaginons enſuite quatre puiſſances égales m appliquées en B, b, D, d; $m\varphi(AB)$ ſera la puiſſance en A équivalente à la double puiſſance m appliquée en B & en b; & $m\varphi(AD)$ ſera la puiſſance en A, équivalente aux deux puiſſances m appliquées en D & en d. Donc la ſomme de ces deux puiſſances appliquées en A ſera $m\varphi(AB) + m\varphi(AD) = m\varphi(x - y) + m\varphi(x + y)$. Or les deux puiſſances m appliquées en B & en D, donnent la puiſſance équivalente en $C = m\varphi(BC) = m\varphi y$; & les deux puiſſances en C & en c, chacune $= m\varphi y$, & égales entr'elles, donnent la réſultante appliquée en A, égale à $m\varphi y \times \varphi AC = m\varphi y \times \varphi x$; & comme cette derniere réſultante doit évidemment être égale à la ſomme des deux précédentes, on aura $m\varphi(x - y) + m\varphi(x + y) = m\varphi x \times \varphi y$; d'où réſulte (*Mém. de* 1769, pag. 279,) $\varphi x = c^{xVA} + c^{-xVA}$, & $\varphi y = c^{yVA} + c^{-yVA}$.

3. On voit que ce cas eſt parfaitement analogue à celui de la compoſition des forces, lorſque le Parallé-

logramme eſt un rhombe. Voyez la Note (2) ſur l'*art.* 3 du §. I (*Mém.* 1769). On voit de plus qu'au lieu de $c^{x\sqrt{A}} + c^{-x\sqrt{A}}$, on peut ſubſtituer 2 cof. $(x\sqrt{} - A)$ qui lui eſt égal, & qu'on aura de même $c^{y\sqrt{A}} + c^{-y\sqrt{A}} = 2$ cof. $(y\sqrt{} - A)$. Enfin on ſe ſouviendra (*Mém. de* 1769, §. III, *art.* 3) que $c^{x\sqrt{A}} + c^{-x\sqrt{A}} = 2$ dans le cas préſent, d'où il s'enſuit que $\sqrt{A} = 0$.

4. Venons maintenant au cas des puiſſances inégales, & ſuppoſons une puiſſance m appliquée en B (Fig. 51), & une puiſſance n en D, & C leur point d'appui. Ayant fait $Cb' = CB$, & $Cd' = CD$, ſoient imaginées une puiſſance m en b' & une puiſſance n en d'; la puiſſance en C, réſultante de B & de b', ſera $= m\varphi BC = 2m$ cof. $(BC\sqrt{} - A)$, & la puiſſance en C, réſultante de D & de d', ſera $m\varphi CD = 2m$ cof. $(CD\sqrt{} - A)$. Or la ſomme de ces deux puiſſances doit évidemment être double de la réſultante de B & de D; donc cette réſultante ſera $\frac{m\varphi BC + m\varphi CD}{2} = m$ cof. $(BC\sqrt{} - A) + m$ cof. $(CD\sqrt{} - A)$.

5. Donc dans la Fig. 52 prenant un point quelconque A au-delà de B & de D, & ſuppoſant $Ab = AB$, $Ac = AC$, $Ad = AD$, ſi on imagine deux puiſſances égales m appliquées en B & en b, & deux puiſſances égales n appliquées en D & en d, & qu'on appelle comme ci-deſſus AC, x, & CB, y, on aura, en ſuppoſant $CD = z$, $2m\varphi AB + 2n\varphi AD = \frac{m\varphi BC + m\varphi CD}{2} \times \varphi AC$ ou $m\varphi(x - y) +$

$n\varphi(x+z) = \frac{m\varphi y + n\varphi z}{2} \times \varphi x$; c'eſt-à-dire, $2m \times$ cof. $[(x-y)\sqrt{-A}] + 2n$ cof. $[(x+z)\sqrt{-A}] =$ $[m$ cof. $(y\sqrt{-A}) + n$ cof. $(z\sqrt{-A})] \times 2$ cof. $(x\sqrt{-A})$. Donc en achevant le calcul & réduiſant, on aura m ſin. $(y\sqrt{-A}) - n$ ſin. $(z\sqrt{-A}) = 0$, ou $\frac{m}{n} = \frac{\text{ſin. } (z\sqrt{-A})}{\text{ſin. } (y\sqrt{-A})}$; équation analogue à celle du §. I *art.* 5 des *Mém. de* 1769, ſavoir $a = \frac{b \text{ ſin. } (\alpha - u)}{\text{ſin. } u}$. De plus, comme A eſt ici $= 0$ (*art.* 2), on aura $\frac{\text{ſin. } z}{\text{ſin. } y} = \frac{z}{y}$, & $\frac{m}{n} = \frac{z}{y}$; ce qui eſt le principe du Levier.

On voit aſſez par ce détail l'analogie qui eſt entre le Levier & le Parallélogramme des Forces.

§. III.

Réflexions ſur quelques loix de Méchanique.

1. Il eſt viſible, dit-on, dans les *Mém. de Turin*, Tom. II, pag. 318, qu'une maſſe A animée de la vîteſſe a, & une maſſe B animée de la vîteſſe $\frac{Aa}{B}$, feront équilibre à la même force p; d'où il s'enſuit que l'effet de cette force p ſur les deux corps A & B ſera de leur donner des vîteſſes réciproques à leurs maſſes. Je ne crois pas cette conſéquence inconteſtable. Car ſoit la force p égale à une maſſe C animée de la vîteſſe

$\frac{Aa}{C}$, cette maſſe C fera équilibre à la maſſe A animée de la vîteſſe a, & à la maſſe B animée de la vîteſſe $\frac{Aa}{B}$; cependant cette maſſe C imprimeroit à la maſſe A ſuppoſée en repos, une vîteſſe $= \frac{Aa}{C+A}$, & à la maſſe B ſuppoſée en repos, une vîteſſe $= \frac{Aa}{C+B}$. Or ces vîteſſes ne ſont pas en raiſon inverſe de A & de B, mais de $C+A$ & $C+B$.

2. Il me paroît donc que la concluſion qu'on veut tirer à l'endroit cité des *Mém. de Turin*, ſur la vérité métaphyſique du principe $pdt = mdu$, n'eſt pas néceſſairement admiſſible; & que ce principe, enviſagé comme purement géométrique, ou plus exactement, comme une expreſſion purement analytique, peut toujours être vrai, quand même une force donnée ne produiroit pas la même quantité de mouvement dans des maſſes différentes; parce que dans cette équation $pdt = mdu$, on n'eſt point obligé de regarder p comme autre choſe que comme un ſimple coefficient de dt. Voyez ſur cela notre *Traité de Dynamique*, ſeconde Edition, *art.* 22 & 158.

3. Quelques Mathématiciens ont cru que les forces ne pouvoient être que comme une puiſſance des vîteſſes qu'elles impriment. La raiſon qu'ils en apportent, c'eſt que ſi on avoit, par exemple, $f = au - buu$, $u = \frac{a}{b}$

donneroit $f = 0$; ce qui seroit absurde. Mais on peut répondre 1°. que la fonction de u qui représentera f doit être telle qu'en faisant $u = 0$, elle soit $= 0$, & qu'en donnant à u une valeur quelconque finie & réelle, f ne soit jamais $= 0$. 2°. Qu'en donnant à u différentes valeurs, il n'en résulte jamais la même valeur pour f. D'ailleurs il s'ensuivroit du raisonnement dont il s'agit, que f ne pourroit être égale qu'à des puissances impaires de u, puisque si on avoit, par exemple, $f = Au^2$, f positive répondroit également à u positive & à u négative. On ne peut donc déterminer par des raisonnemens algébriques l'équation entre les forces & les vîtesses.

4. Supposons qu'un corps tende à se mouvoir suivant une ligne de direction donnée, de maniere que l'équation entre les temps & les vîtesses soit $du = Au^n dt$; c'est-à-dire, que la force accélératrice soit comme une puissance n de la vîtesse ; supposons de plus que lorsque $t = 0$, u soit $= 0$, ainsi que l'espace x parcouru durant le temps t ; on aura les équations

$$du = Au^n dt,$$
$$du = Au^{n-1} dx,$$

desquelles il résulte (Voy. *Mem. Acad.* 1769, p. 120 & suiv.) que si $n =$ ou plus grand que 1, u sera $= 0$ quel que soit t, & que si $n - 1$ est $=$ ou > 1, c'est-à-dire, $n =$ ou > 2, u sera $= 0$ quel que soit x ; d'où il paroît s'ensuivre que si n est entre 1 & 2, u sera $= 0$ quel que soit t, mais non pas $u = 0$ quel que soit x, ce qui semble contradictoire.

5. Pour éclaircir cette eſpéce de paradoxe, on remarquera d'abord qu'en ſuppoſant $n-1<1$, ou $n<2$; mais >1, on aura $\frac{du.u^{1-n}}{A}=dx$, $\frac{u^{2-n}}{(2-n)A}=x$; & $u=[(2-n)Ax]^{\frac{1}{2-n}}$; donc dt ou $\frac{dx}{u}=\frac{dx}{Bx^{\frac{1}{2-n}}}$; donc ſi $\frac{1}{2-n}$ eſt $=$ ou >1, c'eſt-à-dire; ſi n eſt $=$ ou >1, x ſera $=0$ quel que ſoit t. Ainſi lorſque n eſt $=$ ou >1, quoique n ſoit <2, le mouvement du corps eſt illuſoire, quoiqu'il y ait une équation réelle apparente entre les eſpaces & les vîteſſes.

6. Au contraire, & en général lorſque n eſt <1, on a les équations réelles $Cu^{2-n}=x$, entre les vîteſſes & les eſpaces, & $t=Dx^{\frac{1-n}{2-n}}$ entre les temps & les eſpaces. Et plus généralement encore, ſi un corps tend à ſe mouvoir ſuivant une direction donnée, de maniere que $x=Et^p$, p étant une quantité poſitive, ce corps aura toujours un mouvement réel. Cette équation entre les temps & les eſpaces eſt la ſeule à laquelle on doive s'arrêter, parce qu'il n'y a ici de réel que l'eſpace parcouru & le temps employé à le parcourir; la vîteſſe n'eſt rien de réel & de phyſique, ce n'eſt que le rapport de l'eſpace au temps; & au lieu de l'équation $du=Au^n dt$, il faut conſidérer l'équation $\frac{ddx}{dt}=\frac{Adx^n}{dt^{n-1}}$, qui donnera l'équation $Bdx^{1-n}=\frac{t}{dt^{n-1}}$;

&

& par conſéquent $Cdx = t^{\frac{1}{1-n}}\,dt$, ou $x = Ft^{\frac{2-n}{1-n}}$, équation illuſoire ſi $n > 1$ & < 2. *Voy. l'Appendice.*

7. Il ne doit pas paroître plus paradoxe que $x = At^3$ donne un mouvement réel, qu'il ne l'eſt que $x = At^2$ donne un mouvement réel, pourvû que dans les deux cas le corps tende à ſe mouvoir ſuivant une direction *donnée*; il eſt vrai que dans le premier cas $\frac{ddx}{dt^2} = 0$ lorſque $t = 0$, ce qui n'a pas lieu dans le ſecond cas, ou $\frac{ddx}{dt^2}$ eſt fini lorſque $t = 0$; mais il n'importe que ce ſoit la quantité $\frac{d^2x}{dt^2}$, comme dans le ſecond cas, ou $\frac{d^3x}{dt^3}$, comme dans le premier cas, qui ſoit finie lorſque $t = 0$; il ſuffit qu'il y ait une équation réelle & poſſible entre les temps & les eſpaces, pour que le mouvement ſoit toujours poſſible, pourvû que cette équation ſoit telle 1°. que $t = 0$ rende $x = 0$, 2°. que x croiſſe à meſure que t croît; 3°. que x ne ſoit jamais ni négatif ni imaginaire, t étant toujours poſitif, & devant toujours être ſuppoſé tel. 4°. Enfin, & c'eſt ici une condition eſſentielle, que le corps *tendè* à ſe mouvoir ſuivant une direction *déterminée.* C'eſt ſur-tout par cette derniere conſidération qu'on peut expliquer, ce me ſemble, quelques contradictions apparentes que M. Euler trouve entre le calcul & la nature, dans les équations générales du mouvement. Voyez

ſa *Méchanique*, Tome I, *art.* 396, & ailleurs. C'eſt par-là, par exemple, qu'on peut expliquer pourquoi un corps, lancé en ligne droite avec une vîteſſe initiale a dans un milieu qui réſiſte comme u^n, ceſſe de ſe mouvoir lorſque $u = 0$, quoiqu'en certains cas le calcul ſemble donner le contraire; le corps s'arrête au point de l'eſpace où $u = 0$, parce que lorſqu'il eſt arrivé en ce point, il ne tend point à continuer ſa route ſuivant la ligne de ſa direction primitive.

8. Il faut obſerver encore que l'équation $x = Et^p$, donne u ou $\frac{dx}{dt} = Ept^{p-1}$, ou $Fx^{\frac{p-1}{p}}$, F, E, p étant des quantités poſitives. D'où l'on voit que quand x & $t = 0$, u ſera infinie ſi p eſt < 1. Ainſi il n'eſt pas néceſſaire que $u = 0$ lorſque x & $t = 0$, & il ſe peut même que u ſoit infinie dans ce cas. Ce paradoxe apparent n'aura rien d'extraordinaire, ſi on fait réflexion, qu'à la vérité dans le cas de $p < 1$, x & $t = 0$ donnent $u = \infty$, mais que u diminue à meſure que x & t augmente, enſorte que prenant x & t finies, & ſi petits qu'on voudra, u eſt finie.

9. De-là on voit que dans l'équation $du = Au^n dt$, il n'eſt pas rigoureuſement néceſſaire que u ſoit $= 0$ lorſque t & x ſoit $= 0$, mais il faut néceſſairement que l'équation $x = Et^{\frac{2-n}{1-n}}$, ou $t = Dx^{\frac{1-n}{2-n}}$, qui en réſulte, donne $t = 0$ lorſque $x = 0$, & réciproquement; d'où il s'enſuit que $\frac{2-n}{1-n}$ doit être poſitif,

& qu'ainſi il faut que n ſoit < 1 ou > 2. On voit auſſi par les équations $\frac{u^{2-n}}{(2-n)A} = x$, & $\frac{u^{1-n}}{(1-n)A} = t$, déduites de l'*art.* 4, que ſi n eſt < 2 & > 1, l'équation entre les u & les x paroîtra contradictoire à celle qui eſt entre les u & les t; car la premiere demande que A ſoit poſitif, & la ſeconde que A ſoit négatif, afin que u ſoit toujours poſitive & réelle, x & t étant poſitifs & réels. Mais cette contradiction ne doit pas étonner, puiſque nous avons vu (*art.* 5) que dans le cas de $n < 2$ & de $n > 1$, l'équation entre les t & les x eſt illuſoire, x n'étant pas $= 0$ lorſque $t = 0$, & étant même alors $= \infty$, ce qui eſt impoſſible.

§. IV.

Méthode nouvelle, rigoureuſe & directe pour déterminer le mouvement des Fluides dans des Vaſes.

1. Dans mon *Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides*, publié pour la premiere fois en 1744, j'ai appliqué mon principe général de Dynamique à la recherche du mouvement des Fluides dans des Vaſes; & j'ai réſolu par ce moyen, d'une maniere fort ſimple, pluſieurs queſtions ſur le mouvement des Fluides, dont quelques-unes avoient été mal réſolues, & les autres ne l'avoient été que d'une maniere indirecte. Mais ces ſolutions étoient appuyées ſur une ſuppoſition qui n'eſt pas exactement vraie, ſavoir que les tranches horizon-

tales conſervent leur parallèliſme dans leur mouvement, ſuppoſition qui empêche même, comme je ne l'ai point diſſimulé, de pouvoir trouver d'une maniere exacte & ſatisfaiſante le mouvement des Fluides dans des Vaſes de figure irréguliere, dans des Vaſes traverſés par des diaphragmes, dans des Vaſes ſubmergés, &c.

2. J'ai donné depuis, en 1752, dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, une méthode directe & rigoureuſe pour déterminer le mouvement des Fluides dans des Vaſes, méthode dont on peut voir les applications & les réſultats dans le premier & le cinquiéme Volume de mes *Opuſcules*. Mais cette méthode, comme je l'ai encore remarqué, a l'inconvénient de ſe refuſer ſouvent à l'analyſe, & par conſéquent de ne pouvoir donner dans les cas difficiles des réſultats auſſi nets & auſſi ſimples qu'on pourroit le deſirer.

3. En voici une qui a, ce me ſemble, cet avantage, ſans employer aucun principe précaire, ni aucune hypothèſe qui ne ſoit parfaitement conforme aux loix connues de l'équilibre & du mouvement des Fluides. Je me propoſe, ſi ma ſanté me le permet, & ſi les Géometres le jugent néceſſaire, de développer quelque jour les conſéquences & les applications de cette méthode dans le VII Volume de ces *Opuſcules*, qui pourra contenir d'ailleurs d'autres Recherches que j'ai déjà commencées ſur le mouvement des Fluides.

4. Pour donner aux Géometres une idée de cette méthode, je conſidere 1°. que la ſurface ſupérieure d'un

Fluide qui ſe meut dans un Vaſe, demeurant toujours ſenſiblement horizontale, il ſuffit, pour connoître le mouvement du Fluide, d'avoir le mouvement du point ſupérieur A (Fig. 53), placé dans l'axe Ao du Vaſe; quelle que ſoit d'ailleurs la figure de ce Vaſe; 2°. que pour avoir le mouvement de ce point A, il ſuffit d'imaginer un tuyau infiniment étroit, $ABOo$, dans lequel ſe meuvent les particules du Fluide, voiſines de l'axe Ao, lequel tuyau $ABOo$ devienne dans l'inſtant ſuivant d'une autre figure, comme $abyid$, &c. 3°. que ſi on appelle p la peſanteur, x la variable AC, v la vîteſſe de la tranche infiniment petite CD, ou ſimplement du point C, la tranche CD, y, m une tranche du Fluide dont la vîteſſe ſoit u, on aura $v = \frac{um}{y}$.

4°. Nous avons ſuppoſé dans nos Recherches précédentes ſur le mouvement des Fluides dans des Vaſes, que la vîteſſe $v = \frac{um}{y}$ de chaque tranche à chaque inſtant, étoit telle que m reſtoit toujours la même à chaque inſtant, & que y ne varioit à chaque inſtant que de dy, c'eſt-à-dire, que la figure du tuyau $ABOo$ demeuroit conſtante. Mais ſi cette figure varioit à chaque inſtant, comme nous le ſuppoſons à préſent pour plus d'exactitude & de généralité, c'eſt-à-dire, ſi la tranche m, qui répond à une abſciſſe donnée, devenoit au bout du temps dt, $m + \delta m$, & que la tranche y qui répond à x, devînt, en ſuppoſant x conſtante, $y + \delta y$,

& qu'en ſuppoſant x augmentée de dx, y devînt $y + dy + \delta y$, on auroit alors $dv = \frac{m\,du}{y} + \frac{u\,\delta m}{y} - \frac{u\,m\,dy}{y^2} - \frac{u\,m\,\delta y}{y^2}$; & l'équation $\int p\,dx - \int dx \cdot \frac{dv}{dt} = 0$ ſeroit $dt \int p\,dx - m\,du \int \frac{dx}{y} - u\,\delta m \int \frac{dx}{y} + y\,dx \cdot u\,m \int \frac{dy}{y^3} + u\,m \int \frac{dx\,\delta y}{y^2} = 0$; équation dans laquelle il faudra mettre, au lieu de dt, $\frac{k\,dz}{u\,m}$ (en ſuppoſant que dz ſoit l'eſpace parcouru par la tranche ſupérieure k, avec la vîteſſe $\frac{u\,m}{k}$) & pour $y\,dx$ ſa valeur $k\,dz$.

5. Si on différentie $\frac{m^2 u^2}{2} \int \frac{dx}{y}$ en faiſant varier u de la quantité du, m de la quantité δm, & y de la quantité $dy + \delta y$, on aura cette différence $= m^2 u\,du \times \int \frac{dx}{y} + u^2 m\,\delta m \int \frac{dx}{y} - \frac{m^2 u^2 \cdot y\,dx}{2} \times 2 \int \frac{dy}{y^3} - \frac{m^2 u^2}{2} \int \frac{dx\,\delta y}{y^2}$; or $\int \frac{dx\,dv}{dt} =$ (en mettant pour dt ſa valeur $\frac{k\,dz}{u\,m}$ ou $\frac{y\,dx}{u\,m}$) $\frac{m^2 u\,du}{k\,dz} \int \frac{dx}{y} + \frac{u^2 m\,\delta m}{k\,dz} \times \int \frac{dx}{y} - m^2 u^2 \times \int \frac{dy}{y^3} - \frac{u^2 m^2}{k\,dz} \int \frac{dx\,\delta y}{y^2}$; donc $\int \frac{dx\,dv}{dt} = \frac{d\left(m^2 u^2 \int \frac{dx}{y}\right)}{2\,k\,dz} - \frac{u^2 m^2}{2\,k\,dz} \int \frac{dx\,\delta y}{y^2}$.

6. La propoſition précédente peut encore ſe prouver

en considérant 1°. que $\int\frac{dx\,dv}{dt}=\int\frac{y\,dx.v\,dv}{k\,dz}$, à cause de $yv=mu$, & de $dt=\frac{k\,dz}{mu}$; 2°. que $\int y\,dx.v\,dv=\int y\,dx.d\left(\frac{m^2u^2}{2yy}\right)=\int y\,dx\times\frac{d(m^2u^2)}{2yy}-m^2u^2\times\int\frac{y\,dx\,dy}{y^3}-\int\frac{y\,dx\,\delta y.m^2u^2}{y^3}=\frac{d(m^2u^2)}{2}\int\frac{dx}{y}-m^2u^2y\,dx\int\frac{dy}{y^3}-m^2u^2\int\frac{dx\,\delta y}{y^2}=d\left(\frac{m^2u^2}{2}\int\frac{dx}{y}\right)-\frac{m^2u^2}{2}\int\frac{dx\,\delta y}{y^2}$.

7. Si $\frac{\delta m}{m}=\frac{\delta y}{y}$, la valeur de $\int\frac{dx\,dv}{dt}$ sera $\frac{mmudu}{k\,dz}-\frac{u^2m^2y\,dx}{k\,dz}\int\frac{dy}{y^3}$, précisément comme dans le cas où m & y ne changent point; & en effet, il est évident que $\frac{m'}{y'}$ ou $\frac{m+\delta m}{y+\delta y}$ est alors égal à $\frac{m}{y}$; & qu'ainsi $\frac{u'm'}{y'}$ est $=\frac{u'm}{y}$. Donc, &c.

8. On peut toujours supposer que la conservation des forces vives a lieu rigoureusement dans le mouvement des Fluides, en imaginant ce mouvement tel qu'il est réellement, & en s'abstenant de toute hypothèse arbitraire sur le mouvement des particules fluides, telle que l'hypothèse du parallèlisme des tranches, ou d'autres semblables. Pour se convaincre de cette vérité, il ne faut que relire la preuve que nous en avons donnée dans le Tom. I de nos *Opuscules*, IV. Mémoire, §. XVI.

Mais elle peut encore ſe prouver par les formules précédentes, comme il ſeroit aiſé de le faire voir.

9. Voyons maintenant ce qui arriveroit, dans le cas où les quantités m & y ſeroient ſuppoſées varier à chaque inſtant d'une grandeur finie. Il eſt évident qu'alors m étant $m + m'$, & y devenant $y + dy + y'$, on aura $dv = \frac{u'(m+m')}{y+dy+y'} - \frac{um}{y} = \frac{u'(m+m')}{y+y'} - \frac{um}{y} - \frac{u'(m+m')dy}{(y+y')^2}$; d'où l'on tirera aiſément la valeur de $\int \frac{dx\,dv}{dt}$, dans laquelle même on peut négliger le terme qui contiendroit dy, comme infiniment petit par rapport aux autres.

10. Dans ce dernier cas, la conſervation des forces vives n'aura pas lieu, parce que la vîteſſe de chaque point change bruſquement d'un inſtant à l'autre d'une quantité finie; & en faiſant $\int p\,dx - \int \frac{dx\,dv}{dt} = 0$, la connoiſſance de u' dépendra de celle de m' & de y'.

11. On peut ſuppoſer, ſi l'on veut, pour plus de ſimplicité, que la quantité m reſte conſtante, & que la ſeule variable y varie de la quantité $dy + \delta y$. En effet, au lieu de $\frac{m+\delta m}{y+dy+\delta y}$ on peut écrire $\frac{m}{y+dy+\delta' y}$, $-\frac{m\delta' y}{y^2}$ étant $= \frac{\delta m}{y} - \frac{m\delta y}{y^2}$ ou $-\delta' y = \frac{y\delta m - m\delta y}{m}$. Il faut ſeulement remarquer qu'alors $\delta' y$ n'eſt

n'eſt pas la différence de y en faiſant x conſtant, mais que cette différence eſt toujours δy, & δm celle de la tranche m qui répond à une abſciſſe donnée & conſtante.

12. Les ſuppoſitions précédentes ſur la valeur de u, peuvent ſervir à rendre aiſément raiſon de tous les phénomenes qui peuvent s'obſerver dans le mouvement des Fluides. En effet, on aura $\int p\,dx - \int \frac{dx\,dv}{dt} = 0 = \int p\,dx - \frac{m\,m\,u\,du}{k\,d\zeta} \times \int \frac{dx}{y} + \frac{u^2 m^2}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{K^2}\right) - \frac{u^2 m\,\delta m}{k\,d\zeta}\int \frac{dx}{y} + \frac{u^2 m^2}{k\,d\zeta}\int \frac{dx\,\delta y}{y^2}$, ou ſimplement, en faiſant $\delta m = 0$, $\int p\,dx - \frac{m\,m\,u\,du}{k\,d\zeta}\int \frac{dx}{y} + \frac{u^2 m^2}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{K^2}\right) + \frac{u^2 m^2}{k\,d\zeta}\int \frac{dx\,\delta' y}{y^2} = 0$. Ce dernier terme $\frac{u^2 m^2}{k\,d\zeta} \times \int \frac{dx\,\delta' y}{y^2}$, introduit par la Théorie nouvelle que nous propoſons, renfermant une quantité $\int \frac{dx\,\delta' y}{y^2}$, dans laquelle l'inconnue $\delta' y$ pourra être ſuppoſée telle qu'il ſera néceſſaire, pour ſatisfaire au réſultat de toutes les expériences qu'on pourra faire ſur le mouvement des Fluides dans des Vaſes de figure quelconque, dans des Vaſes traverſés de diaphragmes, dans des Vaſes ſubmergés, dans des Syphons, &c. C'eſt ce que nous pourrons développer ailleurs avec plus de détail; mais en attendant, pour répandre un nouveau jour

ſur la méthode que nous venons d'expoſer, nous allons donner une ſeconde maniere, encore plus directe & plus lumineuſe, d'enviſager le mouvement des particules de Fluide infiniment proches de l'axe Ao.

13. Imaginons (comme nous l'avons déja fait dans le Tome I de nos *Opuſcules*, pag. 157) que dans un inſtant quelconque la particule B du Fluide ſe meuve vers b, la particule b vers $\mathfrak{C}$, & ainſi de ſuite, tandis que les parties A, a, α, ſe meuvent vers a, α, ϵ, &c. on aura par ce moyen un canal $ABDOoA$, dans lequel les vîteſſes de chaque tranche AB, CD, feront évidemment en raiſon inverſe de la largeur de ces tranches; & ſuppoſant $ABCD = abC'D'$, la tranche CD viendra en $C'D'$, pendant que la tranche AB vient en ab.

14. Imaginons maintenant que dans l'inſtant ſuivant le point a de l'axe venant en α, & le point α en ϵ, le point b vienne en γ, & le point $\mathfrak{C}$ en δ, & ſuppoſons encore pour plus de ſimplicité que $\alpha\mathfrak{C}$, & $\epsilon\delta$ ſoient parallèles entr'elles & à AB, ab. Enfin, ſuppoſons que dans ce ſecond inſtant le point C' parvienne en c, & le point D' en d, enſorte que $C'D'$ & cd ſoient encore parallèles entr'elles & à AB; il eſt clair qu'on aura l'aire $\alpha\gamma dc = abD'C'$, d'où $a\alpha \times ab + \mathfrak{C}\gamma \times D'C' = Cc \times C'D'$.

15. Or ſi on fait $AB = m$, $CD = y$, u la vîteſſe de AB, v celle de CD, on aura $Aa = udt$, $CC' = vdt$, & par la même raiſon $a\alpha = (u + du)dt$, $C'c = (v + dv)dt$; $ab = m + dm$, $C'D' = y + dy$, &

enfin $um = vy$; donc $(m + dm)(u + du)dt + 6\gamma i D' = (y + dy)(v + dv)dt$; donc ſuppoſant $D'i = \rho dt$, & réduiſant, on aura $udm + mdu + \int \rho dx = ydv + vdy$. Donc $dv = \frac{udm}{y} + \frac{mdu}{y} - \frac{vdy}{y} + \frac{\int \varrho dx}{y} = \frac{udm}{y} + \frac{mdu}{y} - \frac{umdy}{yy} + \frac{\int \varrho dx}{y}$; donc $\int dx dv = udm \int \frac{dx}{y} + mdu \int \frac{dx}{y} - umydx \times \int \frac{dy}{y^3} + \int \frac{dx \int \varrho dx}{y}$.

16. Il faut bien remarquer que ρ doit être infiniment petit du ſecond ordre, afin que $\int \rho dx$ ſoit auſſi infiniment petit du ſecond, & par conſéquent infiniment petit, comme il le doit être, par rapport à y ou CD qu'on ſuppoſe déja infiniment petit du premier. Donc ρdt ou $D'i$ eſt infiniment petit du troiſiéme ; & comme $D'e$ eſt infiniment petit du premier, il s'enſuit que l'angle $dD'e$ eſt infiniment petit du ſecond. Ainſi le détour angulaire $dD'e$ que la particule D' fait au ſecond inſtant, par rapport au petit côté $D'e$, eſt infiniment petit du ſecond ordre.

17. Il eſt en effet très-naturel que l'angle $dD'e$ ſoit infiniment petit du ſecond ordre. Car ſi $C'D'$ étoit finie, il faudroit que cet angle fût infiniment petit du premier ordre, afin que le détour du point D' ne fût pas bruſque & ſans gradation. Donc $C'D'$ étant ſuppoſée infiniment petit, enſorte que le complément de l'angle $DD'E$ eſt infiniment petit du ſecond ordre, il

eſt naturel de ſuppoſer que l'angle $dD'e$ eſt auſſi infiniment petit du ſecond ordre.

18. C'eſt pourquoi ſi dans le premier des deux inſtans on ſuppoſe $v = \frac{um}{y}$, & dans l'inſtant ſuivant $v + dv = \frac{(u+du)(m+dm+\delta'm)}{y+dy+\delta'y}$, comme dans l'*art.* 4, p. 381, ou $dv = \frac{mdu}{y} + \frac{udm}{y} + \frac{u\delta'm}{y} - \frac{umdy}{y^2} - \frac{um\delta'y}{y^2}$, on aura $u\delta'm - \frac{um\delta'y}{y} = \int \rho dx$; ou même ſimplement $-\frac{um\delta'y}{y} = \int \rho dx$, en ſuppoſant (*art.* 11) $\delta'm = 0$.

19. Par la méthode que nous venons de donner pour trouver le mouvement du Fluide, il eſt clair que le calcul ſe ſimplifie; enſorte que ſi on nomme Aa, dz, & par conſéquent dt ou $\frac{dx}{v} = \frac{dz}{u}$, on aura $\int \frac{dxdu}{dt} = \frac{mudu}{dz}\int\frac{dx}{y} + \frac{u^2dm}{dz}\int\frac{dx}{y} - \frac{u^2m.mdz}{dz}\int\frac{dy}{y^3} + \frac{u}{dz}\int\frac{dx\int\rho dx}{y} = \frac{1}{mdz} \times \left[\frac{d(muu)}{2}\int\frac{dx}{y} - dz.u^2m^3 \times \int\frac{dy}{y^3} + mu\int\frac{dx\int\rho dx}{y}\right]$.

20. Soit i une quantité infiniment petite; $m = i\mu$, $y = i\zeta$, $K = iK'$, $\rho = \pi i dt = -\frac{\pi i dz}{u}$; la quantité $\frac{\int\rho dx}{y}$ devient $= \frac{dz\int\pi dx}{u\zeta}$, & par conſéquent eſt in-

finiment petite, quand même $\frac{\int \pi dx}{\zeta}$ ſeroit fort grand ; π, ζ étant toujours ſuppoſés des quantités finies, & dz étant infiniment petite. De plus, puiſque $D'i = pdt = \pi i dt^2$, il eſt clair que πi eſt la force qui fait parcourir $D'i$. Donc ſi on fait $\pi = p\varphi$, on aura, au lieu de $\frac{dz\int \pi dx}{u\zeta}$, $\frac{pdz\int \varphi dx}{u\zeta}$.

21. Il n'eſt pas néceſſaire de ſuppoſer dans l'*art.* 13 que les deux dt conſécutifs ſoient conſtans, ni que $ab\alpha\zeta$ ſoit $= ABba$. Mais il eſt bon de remarquer que ſi on ſuppoſe le point γ ſur $\alpha\zeta$, en faiſant $ab\alpha\zeta = ABba$, le ſecond dt ne ſera pas néceſſairement égal au premier, & que réciproquement ſi l'on ſuppoſe le ſecond dt égal au premier, le point γ ne ſera pas néceſſairement ſur $\alpha\zeta$; ce qui d'ailleurs ne change rien au calcul.

22. Quoique nous ayons auſſi ſuppoſé dans ce même *art.* 13, que les tranches ſe meuvent parallèlement dans les deux inſtans conſécutifs, enſorte que $\alpha\zeta$ eſt parallèle à ab, &c. cependant quand ce parallèliſme n'auroit pas lieu, le calcul précédent ſubſiſteroit toujours. Voyez le Tome V de nos *Opuſcules*, pag. 65 & ſuiv. où nous avons traité un cas à peu près ſemblable.

23. Si dans l'*art.* 17 l'angle $dD'e$ étoit ſuppoſé infiniment petit du premier ordre, alors pdt ſeroit infiniment petit du ſecond ordre, & par conſéquent p infiniment petit du premier. C'eſt pourquoi on devroit alors regarder du & dv comme des quantités finies ;

dm & dy étant toujours infiniment petites, & on auroit $(m+dm)(u+du)+\int \rho\, dx = (y+dy)(v+dv)$; d'où $mu+mdu+\int \rho\, dx = yv+y\,dv$, & $dv = \frac{m\,du}{y}+\frac{\int \varrho\, dx}{y}$. Je ne fais, encore une fois, qu'indiquer ici ces différens points de la nouvelle Théorie du mouvement des Fluides, que je pourrai traiter ailleurs avec plus d'étendue. D'autres Auteurs ont cru pouvoir employer d'autres principes; je laiſſe aux Géometres à les apprécier. Cette même raiſon m'empêchera de répondre ici aux obſervations que M. Kœſtner a faites dans le ſecond Volume des *Mémoires de Gottingen* ſur mes objections contre la Théorie de M. Jean Bernoulli; obſervations qui, à dire le vrai, ne m'ont point fait changer d'avis, & ne me paroiſſent pas fort propres à détromper ceux qui auront examiné la Théorie de ce grand Géometre, & peſé mes objections.

§. V.

Solution d'un Problême de calcul intégral.

1. Soit propoſé d'intégrer l'équation $d^3y\,dy+ad^2y\,d^2y+bd^2y\,dy^2+e\,dy^4=0$, dx étant conſtant. En faiſant $dy=p\,dx$, & de plus $dx=\rho\,dp$, ce qui donne $d\,dp=-\frac{d\varrho\,dp}{\varrho}$, on aura la transformée $-\frac{d\varrho}{\varrho}+\frac{a\,dp}{p}+bp\rho\,dp+ep^3\rho^2dp=0$; faiſant en-

ſuite $\frac{p^a}{\varrho} = \zeta$, on aura la nouvelle transformée $\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{bp^{1+a}dp}{\zeta} + \frac{ep^{3+2a}dp}{\zeta^2} = 0$; & ſuppoſant enfin $p^{a+2} = \sigma$, on aura la derniere transformée $d\zeta + b'd\sigma + \frac{e'\sigma d\sigma}{\zeta} = 0$; équation homogene, dans laquelle b', e' ſont des çonſtantes. Donc, &c.

2. En faiſant $\frac{\sigma}{\zeta} = u$, la derniere transformée ſe trouvera toute ſéparée ; or $\frac{\sigma}{\zeta} = \frac{\varrho p^{a+2}}{p^a} = p^2\rho$; donc $\rho = \frac{u}{p^2}$; donc en ſuppoſant $dy = pdx$, & $dx = \frac{udp}{p^2}$, ou ce qui eſt la même choſe $dy = \frac{dx}{p'}$ & $dx = -udp'$, l'équation ſe trouvera toute ſéparée. Ce ſont donc les deux transformations qu'il faut faire pour ſéparer tout de ſuite l'équation différentielle propoſée.

3. Si $a+1$ étoit $= -1$, ou $a = -2$, la ſolution précédente ne pourroit avoir lieu, parce que pour lors p^{a+2} n'eſt pas l'intégrale de $p^{a+1}dp$. Mais en ce cas il faudroit faire $\rho = p^s\zeta$, & on auroit l'équation transformée $-\frac{sdp}{p} - \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{adp}{p} + bp^{s+1}\zeta dp + ep^{3+2s}\zeta^2 dp = 0$, qui eſt homogene ſi l'on a $s+1+1 = -1$, & $3+2s+2 = -1$, d'où l'on tire $s = -3$.

4. En général, ſoit d^3y le premier terme de l'équation, & imaginons qu'elle ſoit compoſée de tant de

termes qu'on voudra $+ a(d^2y)^k dy^\lambda \times dx^{-\lambda-2k+s} + a'(d^2y)^{k'} dy^{\lambda'} dx^{-\lambda'-2k'+s}$, &c. En ſuppoſant comme ci-deſſus $dy = p\,dx$, & $dx = \rho\,dp$, la transformée ſera $-\frac{d\varrho}{\varrho} + a\,dp.p^\lambda \rho^{-k+s} + a'\,dp.p^{\lambda'}\rho^{-k'+s}$, &c. $= 0$.

Soit $\rho = p^s z^t$, on aura la nouvelle transformée $-\frac{s\,dp}{p} - \frac{t\,dz}{z} + a\,dp.p^{\lambda-ks+2s} \times z^{-kt+2t} + a'\,dp.p^{\lambda'-k's+2s} \times z^{-k't+2t}$, &c. $= 0$; équation qui ſera homogene ſi $\lambda - ks + 2s - kt + 2t = -1$, & ſi $\lambda' - k's + 2s - k't + 2t = -1$; d'où l'on tire aiſément $s + t = \frac{\lambda-\lambda'}{k-k'}$; & par conſéquent $\frac{\lambda-\lambda'}{k-k'}$ doit être une quantité conſtante dans tous les termes comparés deux à deux, pour que la propoſée ſoit intégrable.

5. Par exemple, dans le cas de l'équation propoſée *art.* 1, on a $\lambda = -1$, $k = 2$, $\lambda' = 1$, $k' = 1$, $\lambda'' = 3$, $k'' = 0$, donc $\frac{\lambda-\lambda'}{k-k'} = -2$; & $\frac{\lambda-\lambda''}{k-k''} = \frac{-1-3}{2} = -2$. Donc, &c.

6. Si $\frac{\lambda}{k}$ étoit $= \frac{\lambda'}{k'} = \frac{\lambda''}{k''}$, &c. il eſt clair que l'équation ſeroit encore intégrable, & qu'on auroit $s + t = \frac{\lambda-\lambda'}{k-k'} = \frac{\lambda}{k}$.

7. Dans l'équation $s + t = \frac{\lambda-\lambda'}{k-k'}$, on peut ſuppoſer à volonté s ou t tout ce qu'on voudra; par exemple, $t = 0$,

$t = 0$, ce qui donne la ſimple transformation $p = p'$.

8. On trouvera par la même méthode que ſi d^2y eſt le premier terme d'une équation différentielle du ſecond ordre, & que les autres termes ſoient $+ a dy^k \times y^\lambda dx^{2-k} + a' dy^{k'} \times y^{\lambda'} dx^{2-k'}$, &c. on aura, en faiſant $dx = \rho dy$, la transformée $- \frac{d\rho}{\rho} + a dy . y^\lambda \rho^{2-k} + a' dy . y^{\lambda'} \rho^{2-k'}$, &c. $= 0$; équation qui ſera intégrable ſi $\frac{\lambda - \lambda'}{k - k'}$ eſt conſtant. On voit, par exemple, que l'équation $d^2y + \frac{a dy^2}{y} + b y dy dx + e y^3 dx^2 = 0$, eſt intégrable, & ainſi des autres.

9. En général, & ſuivant la méthode que nous avons indiquée dans les *Mém. de l'Acad. de* 1767, pag. 583, *art.* 38, qu'on prenne une équation différentielle du premier ordre entre $\rho, y, d\rho, dy$, qui ſoit réductible à l'homogénéité, & ſoit mis dans cette équation, au lieu de $\rho, \frac{dx}{dy}$, & au lieu de $d\rho, - \frac{ddy . dx}{dy^2}$, on aura une équation différentielle du ſecond ordre en d^2y, dy, y, dx, qui ſera intégrable.

§. VI.

Solution de quelques Problêmes ſur les fonctions Algébriques.

1. Soit propoſé de trouver les fonctions φ & Ψ, telles

que $\varphi(t+as)+\Psi(t+bs)=T\times S$, a & b étant des conſtantes, & T, S, des fonctions de t & de s.

J'ai donné dans les *Mémoires de Berlin de* 1750, pag. 357, une ſolution de ce Problême, mais pour le cas particulier de $b^n=a^n$. En voici une générale pour tous les cas.

On aura d'abord, en différentiant & prenant ſucceſſivement t & s conſtans, les équations $\Delta(t+as)+\Xi(t+bs)=\frac{SdT}{dt}$, & $a\Delta(t+as)+b\Xi(t+bs)=\frac{TdS}{ds}$. Donc 1°. $(b-a)\Delta(t+as)=\frac{bSdT}{dt}-\frac{TdS}{ds}$. 2°. $(a-b)\Xi(t+bs)=\frac{aSdT}{dt}-\frac{Tds}{ds}$. Différentions la premiere équation, en faiſant varier ſucceſſivement t & s, nous aurons $(b-a)\Gamma(t+as)=\frac{bSddT}{dt^2}-\frac{dTdS}{dtds}$; & $(b-a)a\Gamma(t+as)=\frac{bdSdT}{dsdt}-\frac{TddS}{ds^2}$, & par conſéquent $a\left(\frac{bSddT}{dt^2}-\frac{dTdS}{dtds}\right)=\frac{bdSdT}{dsdt}-\frac{TddS}{ds^2}$. Opérons de même ſur la ſeconde équation, & nous aurons $b\left(\frac{aSddT}{dt^2}-\frac{dTdS}{dtds}\right)=\frac{adSdT}{dsdt}-\frac{TddS}{ds^2}$.

2. Donc en comparant ces deux équations, on aura 1°. $(-a+b)\times\frac{dTdS}{dtds}=(b-a)\frac{dTdS}{dtds}$, équation identique. 2°. $\frac{abSddT}{dt^2}-\frac{(a+b)dSdT}{dsdt}+$

$\frac{TddS}{dt^2} = o$. C'eſt l'équation de condition par laquelle on doit déterminer T & S.

3. Pour y parvenir, ſoit en général $\frac{ddT}{dt^2} + \frac{MdSdT}{Sdsdt} + \frac{N.TddS}{Sds^2} = o$, M & N étant des conſtantes, & T, S, devant être des fonctions de t & de s; on intégrera d'abord cette équation, en regardant s & S comme des conſtantes, & on aura $T = Ac^{ft}$, A & f étant ou des conſtantes ou des fonctions de s; & comme T ne peut être qu'une fonction de t (*hyp.*), il s'enſuit que A & f ſont des conſtantes.

4. On aura donc, en ſubſtituant pour T cette valeur dans l'équation différentielle, l'équation $ff + \frac{fMdS}{Sds} + \frac{NddS}{Sds^2} = o$; ce qui donne, en faiſant $S = ac^{\mathfrak{C}s}$, $ff + fM\mathfrak{C} + N\mathfrak{C}\mathfrak{C} = o$, a étant tout ce qu'on voudra; d'où $\mathfrak{C}\mathfrak{C} + \frac{fM\mathfrak{C}}{N} = -\frac{ff}{N}$, & $\mathfrak{C} = -\frac{Mf}{2N} \pm \sqrt{\left(\frac{M^2f^2}{4NN} - \frac{f^2}{N}\right)}$. Donc on aura $T = Ac^{ft}$, A & f étant des conſtantes quelconques, & $S = ac^{\mathfrak{C}s} + a'c^{\mathfrak{C}'s}$, a & a' étant des conſtantes quelconques, & $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ étant égaux à $f \times \left[-\frac{M}{2N} \pm \sqrt{\left(\frac{M^2}{4NN} - \frac{1}{N}\right)}\right]$ & $f\left[-\frac{M}{2N} - \sqrt{\left(\frac{M^2}{4N^2} - \frac{1}{N}\right)}\right]$.

5. On aura donc en général $S \times T = Ac^{ft} \times S +$

$A'c^{fs} \times S'$, A, A', f, f', désignant des constantes quelconques, & S, S', &c. étant égales aux deux valeurs indiquées dans l'article précédent, c'est-à-dire, $S = \alpha c^{\zeta s}$, & $S' = \alpha' c^{\zeta' s}$. *Voyez l'Appendice.*

6. Au lieu d'intégrer dans l'*art.* 3 l'équation en T, on pourroit intégrer l'équation en S, & on auroit de même $S = Ac^{fs}$, & $\frac{ddT}{dt^2} + \frac{M f dT}{dt} + N.Tff = 0$; d'où l'on tire $T = \alpha c^{\zeta t} + \alpha' c^{\zeta' t}$, α & α' étant quelconques, & ζ, ζ' étant égaux à $f\left[-\frac{M}{2} + \sqrt{\left(\frac{M^2}{4} - N\right)}\right]$ & $f\left[-\frac{M}{2} - \sqrt{\left(\frac{M^2}{4} - N\right)}\right]$.

7. Donc on aura encore $S \times T = Ac^{fs}(\alpha c^{\zeta t} + \alpha' c^{\zeta' t})$; A & f étant quelconques, ainsi que α & α', & ζ, ζ' étant égales aux deux valeurs indiquées dans l'article précédent.

8. Donc puisque M (*art.* 2) $= \frac{-a-b}{ab}$, & $N = \frac{1}{ab}$, on aura $\frac{M}{N} = -a-b$; $\frac{M^2}{4NN} - \frac{1}{N} = \frac{(a-b)^2}{4}$, & par conséquent (*art.* 4) $\zeta = a$, & $\zeta' = b$. Donc $T = Ac^{ft}$, & $S = \alpha c^{fas} + \alpha' c^{fbs}$, d'où l'on aura $\varphi(t + as) = \alpha Ac^{f(t+as)}$ & $\Psi(t + bs) = \alpha' Ac^{f(t+bs)}$, A, α, α', f étant des constantes telles qu'on voudra.

9. On aura de même, en prenant pour ζ & ζ' les valeurs indiquées *art.* 6, $T \times S = \alpha Ac^{fs+\zeta t} + \alpha' Ac^{fs+\zeta' t} =$

$aAc^{\mathfrak{C}\left(t+\frac{fs}{\mathfrak{C}}\right)}+a'Ac^{\mathfrak{C}'\left(t+\frac{fs}{\mathfrak{C}'}\right)}$; & il n'eſt pas difficile de voir que $\frac{f}{\mathfrak{C}}=\frac{1}{-\frac{M}{2}+\sqrt{\left(\frac{M^2}{4}-N\right)}}=\frac{-\frac{M}{2}-\sqrt{\left(\frac{M^2}{4}-N\right)}}{N}=-\frac{M}{2N}-\sqrt{\left(\frac{M^2}{4NN}-\frac{1}{N}\right)}=a$; & que par la même raiſon $\frac{f}{\mathfrak{C}'}=b$. Ainſi $\varphi(t+as)=aAc^{\mathfrak{C}(t+as)}$, & $\Psi(t+bs)=a'Ac^{\mathfrak{C}'(t+bs)}$; $\mathfrak{C}$ étant $=\frac{f}{a}$, & $\mathfrak{C}'=\frac{f}{b}$, & f étant une conſtante telle qu'on voudra.

10. Si l'on vouloit, pour plus de généralité, que $\varphi(ht+as)+\Psi(mt+bs)$ fût $=T\times S$, ou, ce qui revient au même, que $\varphi(nt+nas)+\Psi(lt+lbs)$ fût $=T\times S$, on réſoudroit d'abord le problême en ſuppoſant $n=1$, & $l=1$, & enſuite au lieu de $c^{f(t+as)}$, on mettroit $c^{\frac{f}{n}(nt+nas)}$, & au lieu de $c^{f(t+bs)}$, on mettroit $c^{\frac{f}{l}(lt+lbs)}$. On pourroit d'ailleurs, ſi l'on vouloit, réſoudre le problême directement par la méthode de l'*art.* 1.

11. Si on vouloit que $\varphi(ht+as)+\Psi(mt+bs)$ fût $=\Delta(kt+rs)\times\Pi(\delta t+\gamma s)$, h, a, m, b, k, r, δ, & γ étant des conſtantes, on feroit $kt+rs=u$, $\delta t+\gamma s=y$, & en ſubſtituant pour t & s leurs valeurs en u & en y, on auroit $\varphi(\mu u+\nu y)+\Psi(\iota u+\lambda y)=\Delta u\times\Pi y$, problême qui ſe réduit à celui de l'article précédent.

12. Si au lieu de $t+as$ & $t+bs$, on avoit $h+t+as$ & $m+t+bs$, on parviendroit à la même équation différentielle du ſecond ordre en T & en S, qui a été trouvée *art.* 2. En ce cas il faudroit, au lieu de $T=Ac^{ft}$, écrire $T=Ac^{f(t+s)}$ qui revient au même, & au lieu de $S=ac^{\zeta s}+a'c^{\zeta' s}$, il faudroit écrire $S=ac^{\zeta(t+s)}+a'c^{\zeta'(t+s)}$; & on auroit $T\times S=aAc^{f\delta+\zeta\gamma+ft+\zeta s}+a'Ac^{f\delta+\zeta'\epsilon+ft+\zeta' s}=aAc^{f\delta+\zeta\gamma+f(t+as)}+a'Ac^{f\delta+\zeta'\epsilon+f(t+bs)}$; il n'y auroit plus qu'à ſuppoſer $f\delta+\zeta\gamma=fh$, & $f\delta+\zeta'\epsilon=fm$; d'où l'on tireroit, en mettant pour ζ, ζ' leurs valeurs en f, les valeurs de δ, γ, & ϵ, dont une à volonté peut être tout ce qu'on voudra, ou même nulle.

13. Enfin, ſi au lieu de $t+as$ & $t+bs$, on avoit $h+a't+a'as$ & $m+b't+b'bs$, il faudroit, dans l'article précédent, au lieu de $f\delta+\zeta\gamma+f(t+as)$ écrire $f\delta+\zeta\gamma+\frac{f}{a'}(a't+a'as)$; & au lieu de $f\delta+\zeta'\epsilon+f(t+bs)$, écrire $f\delta+\zeta'\epsilon+\frac{f}{b'}\times(b't+b'bs)$, & ſuppoſer $f\delta+\zeta\gamma=\frac{fh}{a'}$, & $f\delta+\zeta'\epsilon=\frac{fm}{b'}$. Au reſte, ce problême & le précédent peuvent ſe réſoudre directement par la méthode de l'*art.* 1.

14. Nous avons fait voir ailleurs que ſi $\varphi(t+s)+\varphi(t-s)=\varphi t\times\varphi s$, on aura $\varphi t=c^{t\sqrt{A}}+c^{-t\sqrt{A}}$, A étant tout ce qu'on voudra; ſoit donc $s=t$; il eſt viſible que ſi on propoſe de trouver φt, telle que

$\phi 2t + 2 = (\phi t)^2$, on aura $\phi t = c^{t\sqrt{A}} + c^{-t\sqrt{A}}$. Voyez les *Mém. de l'Acad.* de 1769, pag. 285. De même, si on a $\varphi(at + bs) + \Psi(ht + ms) = \Delta t \times A\Delta s$, & qu'on suppose $s = t$, on aura l'équation $\varphi[(a+b)t] + \Psi[(h+m)t] = A(\Delta t)^2$, & on déterminera par ce moyen les fonctions cherchées, lorsque la solution sera possible. *Voyez l'Appendice.*

15. On voit assez par les Recherches précédentes, comment on peut généraliser le problême résolu dans les *Mém. de Berlin* 1750. La méthode est fondée en général sur cette considération, que si on a une fonction $\varphi(at + bs)$ ou $\varphi(e + at + bs)$ de t & de s, dans laquelle ces quantités ne soient élevées qu'à une seule dimension, & qu'on fasse cette fonction Δu, sa différence premiere $du\Delta' u$, sa différence seconde $du^2\Delta'' u$, en prenant du constante, & ainsi de suite, la différence de $\varphi(at + bs)$ en faisant varier successivement t & s, & divisant par dt & par ds, sera $a\Delta' u$ & $b\Delta' u$; la différence seconde en faisant varier successivement t & s dans les différences premieres, sera $aa\Delta'' u$, $ab\Delta'' u$, $bb\Delta'' u$, &c. & ainsi de suite; de-là il s'ensuit que si on a une équation de condition pour déterminer, par exemple, deux quantités $\varphi(at + bs)$ & $\Psi(ht + ms)$, on aura en supposant $\Psi(ht + ms) = \Psi k$, & en différentiant deux fois de suite, six équations & six inconnues, Δu, Ψk, $\Delta' u$, $\Psi' k$, $\Delta'' u$, $\Psi'' k$; d'où résultera une seule équation qui ne contiendra plus que Δu, & qui donnera par conséquent la valeur de Δu; cette

équation étant différentiée deux fois de ſuite en faiſant varier t & s, on aura deux équations qui donneront chacune une valeur de $\Delta''u$, & la comparaiſon de ces deux valeurs donnera une derniere équation de condition dans laquelle Δu, Ψk, & leurs différences ne ſe trouveront plus.

16. Si cette derniere équation renferme encore deux inconnues S, T, avec leurs différences, on l'intégrera en ne regardant que S ou T comme variable, ſelon ce qui ſera plus commode, & on tâchera par-là de ſatisfaire aux conditions du problême. Par exemple, ſi on avoit cette équation finale $\frac{Ad^nS}{Sds^n} + \frac{Bd^{n-1}S}{Sds^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{Md^nT}{Tdt^n} + \frac{Nd^{n-1}T}{Tdt^{n-1}} + \ldots\ldots + \theta = 0$; A, B, M, N, &c. étant des conſtantes, & θ une fonction de t, on prendroit $S = ac^{cs}$; & on trouveroit que a & c doivent être des conſtantes, de maniere qu'en ſubſtituant, il ne reſteroit plus qu'une équation en T. On verra dans le §. ſuivant une application de cette méthode.

17. Si on avoit à déterminer trois fonctions $\varphi(at + bs)$, $\Psi(ht + ms)$, $\Pi(lt + ns)$; on auroit par une méthode ſemblable, en différentiant trois fois de ſuite, douze équations & douze inconnues, & on acheveroit le calcul de la même maniere; & ainſi du reſte.

18. Si on avoit à déterminer deux ou pluſieurs fonctions $\varphi(at + bs + cy)$, & $\Psi(ht + ms + ey)$; on ſe

ſe ſerviroit encore d'une méthode analogue ; ce qu'il eſt inutile d'expliquer plus au long.

19. Si on avoit $\varphi(t+s)+\varphi'(t-s)+\mathfrak{C}=\Delta t\times\Gamma s$, $\mathfrak{C}$ étant une fonction rationnelle & ſans diviſeur de t & de s, & que $m=n-1$ fût la puiſſance la plus haute de t ou de s dans $\mathfrak{C}$; il eſt viſible qu'après n différentiations ſucceſſives, la quantité $\mathfrak{C}$ & ſes différences diſparoîtroient, & qu'on auroit $\frac{d^n\Delta t}{\Delta t.dt^n}=\frac{d^n\Gamma s}{\Gamma s.ds^n}$; d'où l'on tirera aiſément Δt & Γs égales à une ſuite de quantités de cette forme Ac^{ft} & Bc^{fs}; de-là on déduira la valeur de $\Delta t\times\Gamma s-\mathfrak{C}$, en mettant $u+y$ pour $2t$, & $u-y$ pour $2s$, & on verra ſi la quantité réſultante eſt de la forme $\varphi u+\varphi' y$; ſans quoi le problême ne ſeroit pas poſſible. Il en ſera de même dans les cas analogues à celui-ci. Il ſuffit de mettre les Analyſtes ſur la voie de ces ſortes de ſolutions, pour qu'ils les trouvent aiſément.

20. Il eſt bon de remarquer que les ſix équations de l'*art.* 15 ne ſont pas toujours néceſſaires. Car ſoit, par exemple, $T\times S=\varphi(at+bs)+\Delta(et+fs)$ comme dans l'*art.* 1; on a $\frac{TdS}{ds}=b\varphi'(at+bs)+f\Delta'(et+fs)$; $\frac{SdT}{dt}=a\varphi'(at+bs)+e\Delta'(et+fs)$; $\frac{dTdS}{dtds}=$ $ba\varphi''(at+bs)+fe\Delta''(et+fs)$; $\frac{TddS}{ds^2}=$ $bb\varphi''(at+bs)+ff\Delta''(et+fs)$; $\frac{SddT}{dt^2}=$

$aa\varphi''(at+bs)+ee\Delta''(et+fs)$. Or de ces six équations les trois dernieres suffisent, parce qu'elles ne renferment que deux inconnues $\varphi''(at+bs)$ & $\Delta''(et+fs)$, qu'on pourra par conséquent faire disparoître au moyen de ces trois équations seulement, ensorte qu'on n'aura plus, comme dans l'*art.* 2, qu'une équation linéaire entre S & T, & leurs différences. En général, soit α une fonction donnée de s & de t, & $\varphi\alpha$ une fonction inconnue de α, on aura $\frac{d\varphi\alpha}{dt}=\frac{d\alpha\Delta\alpha}{dt}$, & $\frac{d\varphi\alpha}{ds}=\frac{d\alpha\Delta\alpha}{ds}$, en supposant $d\varphi\alpha=d\alpha\Delta\alpha$; de même soit $d\Delta\alpha=d\alpha\Gamma\alpha$, on aura $d\left(\frac{d\alpha\Delta\alpha}{dt}\right)$ (en ne faisant varier que t) $=\frac{dd\alpha\Delta\alpha}{dt^2}+\frac{d\alpha^2\Gamma\alpha}{dt^2}$; & (en ne faisant varier que s) $=\frac{dd\alpha\Delta\alpha}{dtds}+\frac{d\alpha^2\Gamma\alpha}{dtds}$; & $d\left(\frac{d\alpha\Delta\alpha}{ds}\right)$ (en ne faisant varier que s) $=\frac{dd\alpha\Delta\alpha}{ds^2}+\frac{d\alpha^2\Gamma\alpha}{ds^2}$; d'où l'on voit que ces trois différentiations, & les deux précédentes, n'introduisent que deux nouvelles inconnues $\Delta\alpha$ & $\Gamma\alpha$. De maniere que si on avoit une équation de condition pour déterminer $\varphi\alpha$, on auroit, en différentiant cinq fois de suite, cinq nouvelles équations, & seulement deux nouvelles inconnues. On pourroit donc chasser ces nouvelles inconnues, en n'employant même que les trois dernieres équations; & par ce moyen on simplifieroit beaucoup le problême proposé.

21. J'ai trouvé dans les *Mém. de Berlin* de 1750, que la réſolution de l'équation $\varphi(t+s)+\Delta(t-s)=\Gamma t\times\Psi s$, ſe réduiſoit à faire enſorte que $\frac{dd\Gamma t}{dt^2}=\frac{dd\Psi s}{ds^2}=A$; d'où l'on tire $\Gamma t=\alpha c^{t\sqrt{A}}+\mathfrak{G}c^{-t\sqrt{A}}$; & $\Psi s=\gamma c^{t\sqrt{A}}+\delta c^{-t\sqrt{A}}$. Si A étoit $=0$, il eſt aiſé de voir qu'on auroit $\Gamma t=C+Dt$; cette valeur de Γt ſe tire de la formule générale $\alpha c^{t\sqrt{A}}+\mathfrak{G}c^{-t\sqrt{A}}$, en regardant A, non comme nul, mais comme infiniment petit; ce qui donne $c^{\pm t\sqrt{A}}=1\pm t\sqrt{A}+\frac{At^2}{2}\pm\frac{A\sqrt{A}.t^3}{2\cdot3}$, &c. d'où $\Gamma t=\alpha+\mathfrak{G}+(\alpha-\mathfrak{G})t\sqrt{A}+(\alpha+\mathfrak{G})\frac{At^2\,\&c.}{2}$; ſoit $\alpha+\mathfrak{G}=C$, $(\alpha-\mathfrak{G})\sqrt{A}=D$, ou $\alpha-\mathfrak{G}=\frac{D}{\sqrt{A}}$; donc $\alpha=\frac{C}{2}+\frac{D}{2\sqrt{A}}$; & $\mathfrak{G}=\frac{C}{2}-\frac{D}{2\sqrt{A}}$; & il eſt évident qu'à cauſe de $A=0$ ou infiniment petit, & de $\alpha+\mathfrak{G}=C$, le terme $\frac{(\alpha+\mathfrak{G})At^2}{2}$ ſe réduit à $\frac{C.At^2}{2}=0$; il en ſera de même des termes ſuivans; qui ſeront ſucceſſivement $\frac{(\alpha-\mathfrak{G})A\sqrt{A}t^3}{2\cdot3}$; $\frac{(\alpha+\mathfrak{G}).A^2t^4}{2\cdot3\cdot4}$, &c. c'eſt-à-dire, $\frac{D.At^3}{2\cdot3}$; $\frac{CA^2t^4}{2\cdot3\cdot4}$; &c. & ainſi du reſte. Donc Γt ſe réduit à $C+Dt$. On verra de même que Ψs ſe réduit à $C'+D't$. Maintenant, pour que $\Gamma t\times\Psi s$

ſoit $= \varphi(t+s) + \Delta(t-s)$, il faut faire $t+s=u$, $t-s=k$, ce qui donne $t=\frac{u+k}{2}$, $s=\frac{u-k}{2}$; donc $\Gamma t = C + \frac{Du+Dk}{2}$, & $\Psi s = C' + \frac{D'u-D'k}{2}$. Donc $\Gamma t \times \Psi s = CC' + C'D\left(\frac{u+k}{2}\right) + CD' \times \left(\frac{u-k}{2}\right) + DD' \times \frac{uu-kk}{4}$, qui ſe réduit à la forme $A + Bu + Fuu + Gk - Fkk$, quantité dans laquelle $\varphi(t+s)$ ou $\varphi u = A + Bu + Fuu$, & $\Delta(t-s)$ ou $\Delta k = Gk - Fkk$.

§. VII.

Sur la Loi de l'Attraction.

1. Soit r le rayon d'une ſurface ſphérique, 2ϖ le rapport de la circonférence au rayon, δ la diſtance d'un point attiré au centre, x l'abſciſſe priſe depuis le centre; & ſoit l'attraction en raiſon inverſe de la puiſſance n des diſtances; l'élément de l'attraction de la ſurface ſera $-2\varpi r dx \times (\delta - x)(\delta\delta - 2\delta x + rr)^{\frac{-n-1}{2}}$; faiſant $\delta\delta - 2\delta x + rr = yy$, on aura pour transformée $\frac{\varpi r}{\delta\delta}[(\delta\delta - rr)y^{-n}dy + y^{-n+2}dy]$, dont l'intégrale complette eſt (à cauſe de $y = \delta \mp r$ lorſque $x = \pm r$) $\frac{\varpi r}{\delta\delta}\left[(\delta\delta - rr)\left(\frac{(\delta+r)^{1-n} - (\delta-r)^{1-n}}{1-n}\right) +\right.$

$\frac{(\delta+r)^{3-n}-(\delta-r)^{3-n}}{3-n}\Big]$, quantité qu'on peut mettre encore ſous cette forme $\frac{\pi r}{\delta\delta}\Big[\frac{(\delta-r)(\delta+r)^{2-n}}{1-n} - \frac{(\delta+r)(\delta-r)^{2-n}}{1-n} + \frac{(\delta+r)^{3-n}-(\delta-r)^{3-n}}{3-n}\Big]$ ou $\frac{\pi r}{\delta\delta}\Big[\Big(\frac{\delta-r}{1-n}+\frac{\delta+r}{3-n}\Big)(\delta+r)^{2-n} - \Big(\frac{\delta+r}{1-n}+\frac{\delta-r}{3-n}\Big)(\delta-r)^{2-n}\Big]$.

2. On peut ſe ſervir de cette formule pour déterminer dans quelles hypothèſes l'attraction eſt la même que ſi toute la maſſe attirante étoit raſſemblée au centre.

3. On voit d'abord que cette quantité ſe réduit à $\frac{\pi r}{\delta\delta}\times\frac{1}{(1-n)\times(3-n)}\times[(4\delta\delta-2n\delta-2r)\times(\delta+r)^{2-n}-(4\delta\delta-2n\delta+2r)\times(\delta-r)^{2-n}]$; & lorſque $n=2$, cette quantité ſe réduit à $\frac{\pi r}{\delta\delta}\times\frac{1}{-1\times 2}\times -4r = \frac{4\pi rr}{\delta\delta}$; c'eſt-à-dire, à la ſurface ſphérique diviſée par le quarré de la diſtance.

4. De même lorſque $n=-1$, c'eſt-à-dire, lorſque l'attraction eſt en raiſon directe de la diſtance, l'attraction devient $\frac{\pi r}{\delta\delta}\times\frac{1}{2\times 4}\times 2.16r\delta^3 = 4\pi r^2\delta$, c'eſt-à-dire, égale à la ſurface ſphérique multipliée par diſtance.

5. Voilà donc deux cas, déja connus l'un & l'autre;

où l'attraction de la surface sphérique est la même que si toute la surface étoit rassemblée au centre ; d'où il s'ensuit que si l'attraction d'une masse infiniment petite, placée à la distance δ, est proportionnelle au produit de la masse par $\frac{A}{\delta\delta} + B\delta$, A & B étant des constantes, l'attraction de la surface sphérique sera $4\pi rr \times \left(\frac{A}{\delta\delta} + B\delta\right)$; c'est-à-dire, encore la même que si toute la surface étoit réunie au centre.

6. Pour se faire une idée nette des constantes A & B, il faut supposer que F soit la force avec laquelle une masse infiniment petite μ, attire à la distance a, dans l'hypothèse de la raison inverse du quarré de la distance, & G la force avec laquelle la même masse μ attire à la distance a, dans l'hypothèse de la raison directe de la distance, & nous aurons $A = \frac{Fa^2}{\mu}$, & $B = \frac{G}{a\mu}$.

7. En général, soit l'attraction proportionnelle à la masse & à une fonction φ de la distance, on aura pour la différentielle de l'attraction de la surface sphérique, en conservant les noms donnés ci-dessus, $\frac{\pi r}{\delta\delta} \times [(\delta\delta - rr) \times dy\,\varphi y + y^2 dy\,\varphi y]$, dont l'intégrale complette est $\frac{\pi r}{2\delta\delta}[(\delta\delta - rr)(\varphi'(\delta + r) - \varphi'(\delta - r)) + \Delta'(\delta + r) - \Delta'(\delta - r)]$, $\varphi'\delta$ étant l'intégrale de $\int d\delta\,\varphi\delta$, & $\Delta'\delta$ l'intégrale de $\int \delta^2 d\delta\,\varphi\delta$.

8. Or pour que cette attraction de la ſurface totale ſoit la même que ſi la ſurface entiere $4\pi rr$ étoit ramaſſée au centre, il faut que la quantité précédente ſoit $= 4\pi rr\varphi\delta$. Employant donc la méthode indiquée p. 399 & ſuiv. on aura une équation finale dans laquelle il ne ſe trouvera que r & $\varphi\delta$, & leurs différences premieres & ſecondes, ou plutôt r, & les quantités $\varphi\delta$, $\frac{d\varphi\delta}{d\delta}$, $\frac{dd\varphi\delta}{d\delta^2}$. C'eſt par cette équation de condition qu'on doit déterminer $\varphi\delta$. Or comme $\varphi\delta$ doit être indépendante de r, il s'enſuit qu'il faudra faire égaux à zéro ſéparément tous les termes où r montera à la même puiſſance. Par-là on déterminera toutes les valeurs poſſibles de $\varphi\delta$.

APPENDICE

Contenant quelques Additions aux Mémoires précédens.

LES Opuſcules que ce Volume renferme, étoient pour la plûpart compoſés depuis long-temps. Comme je les deſtinois au Recueil des Mémoires de l'Académie, j'avois rejetté en Notes pluſieurs choſes, afin d'occuper moins de place dans ce Recueil ; & ce ſont ces Notes qui ſe trouvent ſous le titre de *Remarques* à la fin de pluſieurs de ces Mémoires, mon peu de ſanté ne m'ayant pas permis de les refondre dans le corps des Mémoires mêmes ; ce qui ne peut au reſte produire qu'un très-petit inconvénient pour le genre de Lecteurs auxquels ces Opuſcules ſont deſtinés. En reliſant depuis pour l'impreſſion, les épreuves de ces Mémoires, que j'avois comme perdus de vue, cette lecture m'a ſuggéré quelques vues & réflexions nouvelles, relatives à différens endroits des Mémoires ; & j'ai cru pouvoir faire part aux Géometres de ces réflexions & de ces vues.

Page

Page 17 *ligne* 3 *à compter d'en bas, après ces mots*; 9 secondes, *ajoutez*;

Si les valeurs de N & de p étoient ſuppoſées un peu différentes de celles qu'on leur donne ici, alors λ pourroit être beaucoup plus petit, & l'équation ſéculaire tirée des termes dont il eſt queſtion dans cet article, pourroit peut-être avoir lieu. Il faudroit pour cela 1°. que N fût tant ſoit peu plus grand, c'eſt-à-dire, $= 1 - 0,008455 + x$, & p tant ſoit peu plus grand, c'eſt-à-dire, $= -0,004053 - y$, x & y étant des quantités fort petites. 2°. Que le coefficient du terme qui auroit pour argument $2\zeta - 2p\zeta + N\zeta - 3\zeta + 3n\zeta - 3\pi n\zeta$ ne fût pas trop petit; enſorte qu'au bout de 100 ans, l'équation fût d'environ 9″, comme les obſervations paroiſſent la donner. Si l'on ſuppoſe que les valeurs de x & de y ſoient égales entr'elles, ce qui eſt l'hypothèſe la plus ſimple, & que de plus x & y ſoient chacune à peu près égale au tiers de 0,000350, en ce cas λ ſeroit à peu près égal à $+0,000001$, (en faiſant pour plus de ſimplicité $\pi = 1$) & $\lambda\zeta$ ne ſeroit égal à 90° qu'au bout de 250000 mois périodiques lunaires, c'eſt-à-dire, d'environ 25×750 ou 18750 années. C'eſt aux Aſtronomes à examiner ſi ces ſuppoſitions ſur les valeurs de p & de N peuvent s'accorder avec les obſervations. On ajoutera ſeulement que ſi on prend π non pas $= 1$, mais un peu plus petit, comme il l'eſt en effet, la valeur de λ ſera un peu augmentée, &

par conſéquent le nombre de 18750 années un peu diminué.

Soit maintenant $\frac{B\lambda^2.(360^\circ)^2 n'^2}{57^\circ.17'.44''} = 9''$ l'équation ſéculaire de la Lune, n' étant le nombre de révolutions périodiques de la Lune pendant un ſiécle, on aura $n' =$ à très-peu près $100 \times \frac{10000}{750} = \frac{4000}{3}$; ſuppoſant donc que λ ſoit à peu près connu, il ſera facile d'avoir B. Soit K le coefficient de cof. $(2\zeta - 2p\zeta + N\zeta - 3\zeta + 3n\zeta - 3\pi n\zeta)$ dans la valeur du rayon, il n'eſt pas difficile de voir (Tome V *Opuſc.* pag. 386) que $B\lambda^2$ ſera $\frac{2K \text{ ſin. } \lambda\zeta}{\lambda} \times \frac{\lambda\lambda}{2} = \lambda K \text{ ſin. } \lambda\zeta = \lambda K$, en faiſant pour plus de ſimplicité ſin. $\lambda\zeta = 1$. Et ſi on ſuppoſe ſin. $\lambda\zeta = p$, p étant une fraction plus petite que l'unité, on aura l'équation $\frac{\lambda K(360^\circ)^2(4000)^2 p}{9.(57^\circ.17'.44'')} = 9''$; d'où l'on voit que K ne doit pas être plus petit que $\frac{81''(57^\circ.17'.44'')}{(360^\circ)^2.(4000)^2\lambda}$; c. à. d. à cauſe de λ très-petit, que K doit être beaucoup plus grand que $\frac{81}{60.(360)^2(4000)^2}$.

Or en ſuppoſant que le coefficient de cof. $2\zeta - 2p\zeta$ ſoit de l'ordre de $\frac{1}{500}$, qui eſt à peu près le quarré du ſinus de l'inclinaiſon de l'orbite, que celui de cof. $N\zeta$ ſoit de l'ordre de $\frac{1}{10}$, qui eſt l'excentricité, que celui de cof. $(2\zeta - 2n\zeta)$ ſoit de l'ordre de $\frac{1}{180}$, celui de cof. $(\zeta - n\zeta)$ de l'ordre de $\frac{1}{390.13}$, ou plus

ſimplement de $\frac{1}{360.12}$, & enfin l'excentricité de l'orbite terreſtre de l'ordre de $\frac{1}{60}$, il paroît en réſulter que le coefficient du terme cof. $(2\zeta - 2p\zeta + N\zeta - 3\zeta + 3n\zeta - 3\pi n\zeta)$ ſera de l'ordre de $\frac{1}{500.20.360.12.180.(60)^3}$ $= \frac{1}{5000(360)^2.12.(60)^3}$ qui eſt beaucoup plus petit que $\frac{81}{60(360)^2.(4000)^2}$, à peu près en raiſon de $\frac{1}{30.36}$ à l'unité. Ce qui me porte à douter beaucoup, indépendamment des valeurs, peut-être forcées, qu'il faudroit donner à N & à p, que l'équation ſéculaire de la Lune puiſſe venir du terme dont il s'agit.

On peut, ſinon déterminer, au moins ſe former à peu près une idée de la petiteſſe de λ, en conſidérant qu'au bout d'un ſiécle, par exemple, λ ♪ doit être fort petit, comme de 1 degré, ou en général de m degrés, n étant une fraction, ou un nombre de très-peu d'unités, enſorte qu'on a $\lambda \times 100 \times \frac{100}{75} \times 360° = m°$, ou $\lambda = \frac{3m}{4000.360}$. Donc K ne doit pas être plus petit que $\frac{81.4000.360}{60(360)^2(4000)^2.3m} = \frac{1}{20.40.4000m}$. Nouvelle raiſon pour préſumer que l'équation ſéculaire ne dépend pas des termes dont il eſt queſtion; puiſque ce dernier coefficient eſt à $\frac{1}{5000(360)^2.12.(60)^3}$ comme la fraction $\frac{1}{m}$ eſt à $\frac{1}{360.500.81.36}$, c'eſt-à-dire, prodigieuſement plus grand.

Addition pour la page 20, *art.* 8.

On peut auſſi remarquer que ſi π renferme une quantité conſtante, il y aura des arcs de cercle dans la valeur de $\int \pi x^3 dz$, & par conſéquent dans la valeur du rayon vecteur, ce qui pourra produire encore une partie de l'équation ſéculaire. Quant au calcul de la force π, en ayant égard à la figure non ſphérique de la Terre & de la Lune, on peut voir ce que nous avons dit ſur ce ſujet, *Mém. Acad.* de 1768, p. 343 & ſuiv. & l'utilité dont peut être cette Recherche, même pour d'autres points de la Théorie de la Lune que l'équation ſéculaire. Nous ajouterons ſeulement ici 1°. que ſi la force π renferme une quantité conſtante, l'effet qui en réſulte doit être beaucoup plus conſidérable ſur la Lune que ſur la Terre, ſi l'on veut que l'équation ſéculaire de la Lune qui en réſultera ſoit ſenſible, & que celle de la Terre ne le ſoit pas. 2°. Que dans le calcul de la force π, il ne faut pas oublier d'avoir égard à l'allongement de la Lune dans le ſens de l'équateur, réſultant de l'attraction de la Terre, ce qui donne à la Lune une figure elliptique dans le ſens du méridien & de l'équateur tout-à-la-fois, au lieu que la figure de la Terre eſt ou doit être ſuppoſée ſenſiblement circulaire dans le ſens de l'équateur. Cette différence entre la figure de la Terre & celle de la Lune eſt peut-être ſuffiſante pour que les perturbations de la Lune, réſultantes de ſa figure non ſphérique, ſoient

beaucoup plus ſenſibles que celles de la Terre, réſultantes de la même cauſe.

Addition pour la page 28, *après ces mots, qui terminent le ſecond alinea*, coefficiens des argumens.

Si l'équation propoſée à intégrer étoit $ddt + N'^2 t dz^2 + At^2 dz^2 + Bt^3 dz^2 +$ &c. $= 0$, on auroit $t = a + b$ cof. $Nz + c$ cof. $2Nz + e$ cof. $4Nz$, &c. & ainſi de ſuite; de ſorte que les différentes valeurs de N^2 devroient être xx, $4xx$, $9xx$, $16xx$, &c. Ainſi, appellant A' le coefficient du ſecond terme dans l'équation qui exprime la valeur de N^2, on doit avoir $-A' = xx(1 + 4 + 9 + 16)$, &c. C'eſt pourquoi, ſi l'analyſe eſt ici conforme à la vraie ſolution de la queſtion, le coefficient A' du ſecond terme doit être ſucceſſivement à chaque approximation xx, $(1 + 4)xx$, $(1 + 4 + 9)xx$, &c. au moins à très-peu près. Mais d'un autre côté cette valeur de A', ſi elle eſt exprimée de la ſorte, le ſera par une ſerie divergente, & par conſéquent d'une maniere peu commode pour l'exactitude de l'approximation. Cet objet me paroît pouvoir mériter quelque attention & quelque examen de la part des Géometres, ne fût-ce que pour s'éclairer de plus en plus ſur les avantages ou les inconvéniens des méthodes qu'on peut employer pour réſoudre les queſtions de la nature de celle-ci, & en particulier celle qui regarde le mouvement des apſides.

A cette occaſion, je ferai une remarque ſur les cas

où l'on auroit $N'^2 = 0$, c'eſt-à-dire, où l'équation ſeroit $ddt + At^2 dz^2 + Bt^3 dz^2$, &c. $= 0$, & où le terme affecté de $t dz^2$ ne ſe trouveroit pas. Si le rayon x de l'orbite d'une Planete eſt $= B + t$, l'angle correſpondant $= z$, & que l'équation du mouvement de la Planete ſoit $dz = \frac{dt}{\sqrt{(At t + Bt^3 + Ct^4)}}$, &c. ou en général $\frac{dt}{t\sqrt{(A + \Delta t)}}$, Δt étant une fonction de t qui ſoit $= 0$ quand $t = 0$, l'orbite de la Planete ſera circulaire. C'eſt une ſuite de ce que nous avons démontré dans les *Mém. de l'Acad.* de 1769, p. 88 & ſuiv. & d'où il réſulte pour le cas préſent, que ſi $t = 0$ lorſque $x = z$, on aura $t = 0$ quel que ſoit z. De-là il s'enſuit que dans les équations de cette forme $ddt + At^2 dz^2 + Bt^3 dz^2$, &c. $= 0$, où manque le terme affecté de $t dz^2$, ſi l'on a $t = 0$ lorſque $z = 0$, on aura $t = 0$ quel que ſoit z, ce qui indique une orbite circulaire, puiſque $x = B + t$, ſera alors $= B$.

Addition pour la page 45, *lig.* 4, *après ces mots*, de l'ordre de $n^2 P$.

Une des attentions qu'on doit avoir dans la Théorie de la Lune, pour apprétier la valeur des termes qu'on néglige, c'eſt d'examiner de quel ordre doivent être cenſées les unes par rapport aux autres, les quantités qui entrent dans le calcul des coefficiens. Par exemple, nous venons de voir que $n^2 P$ & λ^2 ſont du même

ordre, P étant l'excentricité de l'orbite lunaire, λ celle de l'orbite terreſtre, & $n^2 = \frac{1}{178}$. On trouvera de même (comme l'a déja remarqué M. de la Grange) que la quantité n^2 étant à peu près $\frac{1}{178}$, ſi on ſuppoſe les parallaxes de la Lune & du Soleil de $9''$ & $57' 30''$, on aura le rapport de ces parallaxes, ou des diſtances a & B de la Lune & de la Terre au Soleil, égal à environ $\frac{1}{383}$, & par conſéquent $\frac{a}{B}$ du même ordre que n^2. De même la tangente de l'inclinaiſon de l'orbite lunaire que j'appelle m, étant = à peu près ſin. ($2° 34'$), on aura $m^2 =$ environ $\frac{1}{500}$, c'eſt-à-dire, du même ordre à peu près que n^2, quoique plus petit; & ainſi du reſte.

Il faut cependant remarquer, que comme les quantités n & P ne ſont pas très-petites, l'une étant environ $\frac{1}{13}$ & l'autre $\frac{1}{20}$, il pourroit ſe faire que $n^2 P$, par exemple, ne fût que de l'ordre de n^2, ſi cette quantité $n^2 P$ étoit affecté d'un coefficient numérique égal à 20 ou même à 10; de même $12 n^3$ ne feroit que de l'ordre de n^2 & non pas de l'ordre de n^3; & ainſi du reſte. Cette valeur de n & celle de P, qui ne ſont, ſi on peut parler ainſi, ni aſſez grandes ni aſſez petites, eſt une des raiſons qui rendent difficile l'apprétiation des quantités qu'on néglige dans la Théorie de la Lune, parce que les coefficiens numériques peuvent altérer beaucoup les termes où entrent ces quantités, & les rendre beaucoup plus grands qu'on ne l'auroit cru.

C'eſt ce qu'il faut examiner avec attention, pour ne pas négliger des quantités trop ſenſibles dans le calcul des équations de la Lune. C'eſt par une erreur de cette eſpéce que les Géometres qui ont travaillé les premiers à la Théorie de la Lune, avoient cru que cette Théorie ne donnoit que la moitié du mouvement réel de l'apogée, parce qu'on ſuppoſoit fauſſement que les deux premiers termes de la valeur de N^2 étant $1 - \frac{3n^2}{2}$, les autres étoient d'un ordre beaucoup plus petit, devant renfermer des puiſſances de n d'un ordre plus grand que le ſecond, au lieu qu'on a fait voir (Voyez nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, premiere Partie, pag. 181 & 182) 1°. que le troiſiéme terme de la ſerie eſt $-\frac{3n^2}{2} \times \frac{15n.10}{16}$, qui eſt réellement de l'ordre de n^2, quoiqu'il paroiſſe de l'ordre de n^3. 2°. Que les termes qui ſuivent celui-là, & qui paroiſſent de l'ordre de n^4, donnent encore environ $23'\ 30''$ de mouvement à l'apogée, quantité qui n'eſt pas encore trop petite par rapport à $1°\ 30'\ 37''$ donné par le ſeul terme $-\frac{3n^2}{2}$. On voit aſſez par ce ſeul exemple combien la conſidération des quantités qu'on peut négliger eſt délicate dans cette Théorie. On en trouvera d'autres preuves frappantes dans le Ch. 22 de la premiere Partie de nos *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſur-tout aux pages 200 & 201.

Autre

Autre Addition pour la page 45, après ces mots, qui terminent l'alinea, les équations ſenſibles du mouvement moyen de la Lune.

Nous avons vu dans le §. II, pag. 11 & ſuiv. comment il peut arriver que les coefficiens de certaines équations ſoient fort différens à la ſeconde approximation, de ce qu'ils ſont à la premiere. Cet inconvénient peut augmenter encore par une autre conſidération que nous allons tâcher de faire ſentir. Soit $A + Bx = 0$ l'équation qui donne, dans la premiere approximation, le coefficient inconnu x; & ſoit $A + a + (B + b)x + Cxx$ &c. $= 0$ l'équation de la ſeconde approximation, ou ſimplement $A' + B'x + Cxx = 0$, dans laquelle x monte au ſecond degré, & dans laquelle A' ſoit peu conſidérable par rapport à B'. Si C n'étoit pas une quantité fort grande, on auroit à très-peu près pour la ſeconde approximation, $x = -\frac{A'}{B'} - \frac{C.A'^2}{B'^3}$. Mais ſi C eſt, par exemple, $= D\rho\rho$, D étant une quantité finie, & ρ^2 un nombre très-grand, on aura $x^2 + \frac{B'x}{D\varrho\varrho} + \frac{A'}{D\varrho\varrho} = 0$; d'où $x = \frac{-B'}{2D\varrho\varrho} \pm \frac{\sqrt{(B'^2 - 4A'D\varrho\varrho)}}{2D\varrho\varrho}$. Or ſi B' n'eſt pas très-grand par rapport à $4A'D\rho\rho$, comme il peut arriver ici, où A' eſt à la vérité ſuppoſé aſſez petit, mais où $D\rho\rho$ eſt ſuppoſé très-grand, & B' une quantité finie, il eſt évident 1°. qu'on ne peut

réduire le radical en ſerie, & encore moins aux deux premiers termes de cette ſerie $B' - \frac{2A'.D\varrho\varrho}{B'}$. 2°. Qu'il deviendra douteux laquelle des deux valeurs de x on doit employer.

Addition pour la page 49, art. 10.

On peut conſidérer encore que puiſque $P=(E-F)m$ (*art.* 8), on aura $E - F = \frac{P}{m}$. Or P eſt toujours une quantité poſitive, puiſque cette quantité exprime l'attraction que la maſſe du ſphéroïde exerce ſur le pole, ſans que la force centrifuge y entre ni doive y entrer pour rien; donc m étant ſuppoſé réel & poſitif, il eſt clair que $E - F$ ſera poſitif, quel que ſoit d'ailleurs m.

Addition pour les pages 69 & 70, art. 4 & 6.

Puiſque $\frac{\varphi}{p} = \frac{1}{288}$ à peu près, il eſt clair que la condition de $\frac{\varphi r}{2p} > \frac{a'}{5}\left(2+\frac{f}{\Delta}\right)$ (*art.* 4), donne $\frac{5\varphi}{4}$ ou $\frac{1}{230} > \frac{a'}{2r}\left(2+\frac{f}{\Delta}\right)$, & $\frac{a'}{r} < \frac{1}{230\left(1+\frac{f}{2\Delta}\right)}$; par la même raiſon la condition de $\frac{\varphi r}{2p} < \frac{a'}{5}\left(2-\frac{f}{\Delta}\right)$ donnera $\frac{a'}{r} > \frac{1}{230\left(1-\frac{f}{2\Delta}\right)}$.

Addition pour la page 91, art. 17, à la fin.

Le logarithme de $1+\alpha$ eſt, comme l'on ſait, $\alpha-\frac{\alpha^2}{2}$ à très-peu près, α étant ſuppoſé fort petit. Or m étant fort petit, $m+\sqrt{(1+mm)}=1+m+\frac{m^2}{2}$; donc $m+\frac{m^2}{2}=\alpha$, donc le logarithme de $m+\sqrt{(1+mm)}$ eſt $m+\frac{m^2}{2}-\frac{m^2}{2}$ à très-peu près, c'eſt-à-dire, m. Or $\frac{1}{\sqrt{(1+m^2)}}=1-\frac{m^2}{2}$; d'où il eſt aiſé de voir que $2\Delta''\delta'\left[\frac{\log.[m+\sqrt{(1+mm)}]}{m}-\frac{1}{\sqrt{(1+mm)}}\right]=\frac{2\Delta''\delta'.mm}{2}=\Delta''\delta' mm$.

Addition pour la page 128, à la fin de l'art. 57 du XLVI Mémoire.

Dans le XLV Mém. p. 47 & ſuiv. j'ai diſcuté le cas où $\frac{A^3}{\zeta'^3}=0$, c'eſt-à-dire, où il n'y a point de corps attirant, ω étant d'ailleurs tout ce qu'on voudra, fini ou très-petit. Or comme $\frac{A^3}{\zeta'^3}$ eſt toujours une quantité très-petite (*art.* 57, pag. 127), il ne ſera pas difficile, en combinant ce Mémoire avec le précédent, de diſcuter les cas dans leſquels ω étant fini ou très-petit, $\frac{A^3}{\zeta'^3}$ ſeroit très-petit. C'eſt un détail que j'abandonne

à d'autres Géometres. Je me contenterai de remarquer, que quel que petit que ſoit $\frac{A^3}{C^{13}}$, l'ordonnée qui dans la courbe de la Figure 5 répond à $m = 0$, ſera toujours infinie & poſitive, & qu'ainſi $\frac{A^3}{C^{13}}$ étant ſuppoſé ſi petit qu'on voudra, mais non pas $= 0$, le problême aura trois ſolutions, dont une donnera m très-petit, c'eſt-à-dire, le ſphéroïde très-allongé. Mais outre que cette ſolution ne donne pas un équilibre ferme, on a encore apporté une autre raiſon pour la rejetter, pag. 126, *art.* 55.

Addition pour la Note (a) du XLVI Mémoire, page 141.

A l'occaſion de cette diſcuſſion ſur les quantités imaginaires & leurs logarithmes, je dirai encore un mot ſur les logarithmes des quantités négatives, dont j'ai déja tant parlé ailleurs. Soit log. $-1 = x$, on aura log. $(-1)^3 = 3$ log. $-1 = 3x$. Or puiſque $-1^3 = -1$, on aura log. $(-1)^3 =$ log. $-1 = x$. Donc $3x = x$, donc $x = 0$. Donc log. $-1 = 0$. Je ne vois pas ce qu'on peut oppoſer à une preuve ſi claire.

Je ne vois pas non plus pourquoi dans une progreſſion géométrique telle que la ſuivante $\div -1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4$, &c. qui revient à $\div -1, 1, -1, 1$, &c. il ne peut pas ſe trouver des quantités poſitives & des négatives, puiſque les quantités $+1$, -1, poſitives

& négatives, & de plus réelles, peuvent se trouver dans une progression géométrique où il n'y a d'ailleurs que des quantités imaginaires.

En effet, soit $dz = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, x étant le cosinus de l'angle z, on aura $dz = \frac{-dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(x^2-1)}} = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}}$, & par conséquent $z = \sqrt{-1}$ log. $[x + \sqrt{(xx-1)}]$; je n'ajoute point de constante, parce que $x = 1$ donne $z = 0$, comme cela doit être. Cette équation $\frac{z}{\sqrt{-1}} = \log. [x + \sqrt{(xx-1)}]$ signifie que si on prend des valeurs successives de x telles que les $x + \sqrt{(xx-1)}$ soient en progression géométrique, les valeurs correspondantes de $\frac{z}{\sqrt{-1}}$, & par conséquent de z, seront en progression arithmétique. Or en supposant que x ne surpasse pas l'unité, toutes ces quantités sont imaginaires, excepté dans le cas de $x = 1$, qui donne $z = 0$, ou = à la circonférence prise tant de fois qu'on voudra, & dans celui de $x = -1$, qui donne z égal à la demi-circonférence prise tant de fois qu'on voudra; de sorte que dans cette progression géométrique que forment ou que sont censés former les nombres ou quantités $x + \sqrt{(xx-1)}$, le premier terme 1 est réel ainsi que le dernier -1, & que tous les autres sont imaginaires. Voilà donc une progression géométrique dont les deux termes extrêmes

ſont 1 & — 1, c'eſt-à-dire, réels l'un & l'autre, & de ſigne contraire, & dont tous les autres termes, moyens entre ceux-là, ſont imaginaires, le terme du milieu qui répond à $x = 0$, ou à $z = 90^\circ$, étant $\sqrt{-1}$, & ayant pour logarithme $\frac{90^\circ}{\sqrt{-1}}$.

Dans le ſecond Volume des *Mém. de Turin*, p. 342 & ſuiv. on convient & même on démontre que la logarithmique a deux branches égales & ſemblables, l'une au-deſſus, l'autre au-deſſous de ſon aſymptote. Or de-là il me ſemble évident que les quantités négatives peuvent auſſi bien avoir des logarithmes réels que les quantités poſitives.

Le P. Venini, ſavant Géometre, qui nous a donné de très-bons *Elémens de Mathématique* en langue Italienne, dit à la page 238 du premier Volume, que cette controverſe ſur les logarithmes réels des quantités négatives, eſt une *queſtion de nom;* & je ne m'éloigne pas de penſer comme lui, dans ce ſens, que la valeur de ces logarithmes dépend abſolument du genre de la progreſſion où ces quantités négatives peuvent ſe trouver, & du ſyſtême de logarithmes qu'on a choiſi; comme les propoſitions connues ſur les logarithmes dépendent de l'hypothèſe que le log. de 1 ſoit toujours pris pour 0, ce qui ſuppoſe tacitement qu'on fait entrer la quantité réelle 1 dans la ſuite des quantités réelles ou imaginaires, poſitives ou négatives, qu'on conſidere comme formant une progreſſion géométrique, & ayant

par conſéquent des logarithmes qui leur répondent, ou ce qui revient au même, une progreſſion arithmétique correſpondante; progreſſion dont la forme eſt d'ailleurs abſolument arbitraire, puiſqu'elle eſt déterminée par cette ſeule condition, que le terme qui répond, dans cette progreſſion arithmétique, au terme 1 de la progreſſion géométrique (terme qu'on ſuppoſe toujours tacitement dans cette derniere progreſſion) eſt égal à zéro.

On voit encore par l'équation $\frac{z}{\sqrt{-1}} =$ logarith. $[x + \sqrt{(xx-1)}$ donnée ci-deſſus, que $x = 1$, a non-ſeulement zéro pour logarithme, mais $\frac{n\pi}{\sqrt{-1}}$, π étant la circonférence & n un nombre entier quelconque poſitif ou négatif. Voilà donc pluſieurs valeurs de log. 1, quoique la progreſſion naturelle des nombres réels & poſitifs, ne donne ou plutôt ne ſemble donner que zéro pour cette valeur. On ne doit donc pas, ce me ſemble, s'en tenir à cette ſeule progreſſion des nombres naturels, réels & poſitifs, pour en tirer des aſſertions générales ſur la valeur des logarithmes, & par conſéquent pour en conclure que les nombres négatifs ne peuvent avoir de logarithmes réels.

Addition pour la page 143, *après ces mots, qui terminent le premier alinea*, comme les Géometres le ſavent.

En effet, ſoit imaginée une hyperbole qui ait pour abſciſſes BC (Fig. 12) $= z$, & pour ordonnées $\frac{bb}{z}$, bb

étant un quarré conſtant & fini; on ſait que l'aire de cette hyperbole eſt infinie; donc puiſque l'aire indéfinie de la logarithmique $ABCD$, n'eſt que finie, l'aire de l'hyperbole renfermera celle de la logarithmique, ſurtout vers l'extrémité D. D'où il eſt aiſé de conclure que prenant $BO = CD$ & infiniment petit, on aura BO ou $c^{-z} < \frac{bb}{z}$; donc $z c^{-z}$ ou $BO \times BC < bb$. Donc $BO \times BC$ ou $BC \times CD$ eſt moindre qu'une quantité finie bb priſe à volonté. Donc $BC \times CD$ eſt infiniment petit. Il eſt d'ailleurs aiſé de voir que l'aire de l'hyperbole étant infinie vers ſon extrémité, & l'aire de la logarithmique finie, & chacune de ces deux aires étant infinie en longueur, il s'enſuit néceſſairement que quand z eſt infinie ou même très-grande, l'ordonnée $\frac{bb}{z}$ de l'hyperbole doit être infiniment plus grande que l'ordonnée correſpondante c^{-z} de la logarithmique.

Addition pour la page 187.

Je me ſuis apperçu après l'impreſſion, qu'à la ligne 2 de cette page, il faut non pas *doubler*, comme je l'ai dit, mais *quadrupler* l'intégrale, comme il eſt très-aiſé de le voir. En conſéquence, il faut p. 188, *art.* 119, lig. 5, & p. 192, *art.* 130, lig. 5, lire $-2\pi\mathfrak{C}m^2r$ au lieu de $-\pi\mathfrak{C}m^2r$; d'où il eſt clair qu'à la page 194, ligne 2, on aura $\frac{3\mathfrak{C}m^2}{2}$ au lieu de $\frac{3\mathfrak{C}m^2}{4}$; à la page

195,

195, ligne 4, $\frac{3\mathfrak{C}M}{2}$ au lieu de $\frac{3\mathfrak{C}M}{4}$; à la page 196, ligne 5, $-\mathfrak{C}M$ au lieu de $-\frac{\mathfrak{C}M}{2}$, & par conséquent ligne 8, $-M$ au lieu de $-\frac{M}{2}$, & ligne derniere, $\frac{4}{3\cdot 5}$ au lieu de $\frac{2}{3\cdot 5}$; d'où il s'ensuit qu'on aura, page 197, lignes 2 & 6, $\frac{6}{24}$ ou $\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{5}{24}$.

On prie le Lecteur de corriger ces légeres mépriſes de calcul.

Addition pour le L. Mémoire, § I, art. 9, pag. 309.

Nous avons ſuppoſé dans la Théorie dont il s'agit ici, que la Comete C eſt pouſſée vers J par une force $= \frac{J}{\xi^2}$, ce qui n'eſt pas rigoureuſement exact, la Comete C devant être cenſée ſollicitée par une force $= \frac{J+C}{\xi^2}$. Il faut donc ſuppoſer, pour l'exactitude de la ſolution, que la maſſe C eſt très-petite par rapport à J. Si elle ne l'eſt pas, alors il faut réſoudre le problême, en regardant C comme indéterminée, & les obſervations du mouvement de la Comete pourront donner, au moins par une eſpéce de tâtonnement, le rapport de C à J.

Le cas où la Comete eſt fort près de la Planete perturbatrice, a encore un autre inconvénient; c'eſt que l'action de la Comete C ſur cette Planete J, & par conſéquent l'effet qui en réſulte ſur l'orbite décrite par

la Comete, peut déranger ſenſiblement l'orbite de la Planete *J*. Mais cet inconvénient ne peut avoir lieu, que dans le cas où la maſſe *C* ſera telle, que $\frac{C}{\xi^2}$ ſoit comparable à $\frac{S}{x^2}$; or il faut ici faire abſtraction de ce cas-là, parce que ſi l'effet de la force $\frac{C}{\xi^2}$ étoit conſidérable, la Planete perturbatrice en ſeroit abſolument dérangée, & ſon orbite autour du Soleil très-conſidérablement altérée; circonſtance qu'on ne ſuppoſe pas qui arrive dans le problême des Cometes, tel qu'on l'a enviſagé juſqu'à préſent.

Au reſte, on peut encore, dans le cas dont il s'agit, ſuppoſer, pour plus de ſimplicité, le centre de gravité commun de la Comete & de la Planete *J*, éloigné de la diſtance ξ' de la Comete *C*, & chercher l'orbite de cette Comete autour de ce centre de gravité, & l'orbite de ce centre de gravité autour du Soleil. Voyez le §. II qui ſuit dans le préſent Mémoire. On eſſayera, parmi différentes ſuppoſitions ſur la poſition du centre de gravité des corps *C* & *J*, celle qui paroîtra ſatisfaire le plus aux obſervations. On trouvera au reſte dans l'Addition ſuivante une autre ſolution du même problême, dont on pourra auſſi faire uſage, ſi on la juge plus facile & plus commode à certains égards & dans certains cas.

Autre Addition pour le L. Mémoire, §. I, art. 9, page 309.

Je ſuppoſe qu'on ait ici ſous les yeux le XII Mémoire de nos *Opuſcules*, Tome II, §. XIII & XIV, p. 106 & ſuiv. & les Figures qui y ſont relatives. Cela poſé, il eſt clair (Fig. 12 de ce ſecond Volume) que le petit ſatellite γ qu'on a ſuppoſé à la Comete, eſt cenſé ſollicité par trois forces; la premiere vers le point $i = \frac{J}{i\gamma^2}$; la ſeconde vers le point $S = \frac{S+C}{\gamma S^2} - \frac{2(S+C)C\gamma \text{ cof. } \gamma Si}{\gamma S^3}$; la troiſiéme perpendiculaire à γS & $= \frac{(S+C)C\gamma \text{ ſin. } \gamma Si}{\gamma S^3}$. Or pendant cē temps lé point i ſe meut autour de S, avec ūnē force cēntralē $= \frac{S+J}{SJ'^2} \times \frac{Si}{SJ'} = \frac{S+J}{SJ'^2} \times \frac{S}{S+J} = \frac{S}{SJ'^2} = \frac{S}{Si^2} \times \frac{S^2}{(S+J)^2}$. D'où il s'enſuit que ſi la diſtance de la Comete C à la Planete J', & par conſéquent celle du ſatellite γ au point i, eſt très-petite, on peut regarder le point γ comme ſe mouvant autour du point i, en vertu d'une force $= \frac{J}{i\gamma^2}$, & étant de plus troublé par les forces $\frac{S+C}{\gamma S^2} \times \left(1 - \frac{2C\gamma \text{ cof. } \gamma Si}{\gamma S}\right)$ & $\frac{(S+C)C\gamma \text{ ſin. } \gamma Si}{\gamma S^3}$, tandis que le point i eſt pouſſé vers S par une force $= \frac{S}{J'S^2}$. Or comme CJ' (*hyp.*) eſt fort petit par rapport

à $J'S$, & que $C\gamma$ eſt parallèle à SJ', il eſt aiſé de voir 1°. que cof. γSi eſt preſque $= 1$, & ſin. γSi preſque $= 0$. 2°. Que les forces perturbatrices du point γ ſe réduiront par conſéquent ſenſiblement à une ſeule force perturbatrice dans la direction de γS, & égale à $\frac{S+C}{\gamma S^2}\left(1-\frac{2C\gamma}{\gamma S}\right)-\frac{S}{J'S^2}$. Par-là on pourra trouver l'orbite de γ autour de i, lorſque γ & i ſont très-proches l'un de l'autre par rapport à leur diſtance de S. En effet, on a 1°. $\gamma S = CS - C\gamma$ à très-peu près, puiſque $C\gamma$ eſt parallèle à $J'S$, & que $J'S$ fait (*hyp.*) un angle très-petit avec CS, CJ' étant ſuppoſé très-petit par rapport à $J'S$. 2°. $CS = J'S - CJ' \times$ coſin. γiS. Donc la force perturbatrice eſt $\frac{S+C}{(J'S-CJ'\text{cof. }\gamma iS-\gamma C)^2}\times\left(1-\frac{2C\gamma}{\gamma S}\right)-\frac{S}{J'S^2}=$ $\frac{C}{J'S^2}+\frac{(S+C).2CJ'\text{cof. }\gamma iS}{J'S^3}$ à très-peu près. 3°. Dans cette expreſſion la force $\frac{C}{J'S^2}$ eſt inconnue, parce que la maſſe C eſt inconnue ; mais il faut remarquer que le point S autour duquel ſe meut le point i, eſt attiré par une force $= \frac{S}{CS^2}$, qu'il faut tranſporter en ſens contraire au point i, & qui eſt égale à $\frac{C}{(J'S-CJ'\text{cof. }\gamma iS)^2}=\frac{C}{J'S^2}+\frac{2C.CJ'\text{cof. }\gamma iS}{J'S^3}$. Ainſi la force perturbatrice $\frac{C}{J'S^2}$ étant commune aux points i

& γ qu'on ſuppoſe tourner autour du point S, on peut n'y point avoir égard. Par conſéquent il ne reſtera proprement de force perturbatrice au point γ que la force $\frac{S \times 2\,CJ' \cos.\,\gamma i S}{J'S^3}$ dans la direction du rayon vecteur γS. Mais il faut remarquer que dans le cas préſent le point J' étant ſollicité vers C par une force $\frac{C}{CJ'^2}$ dont l'effet peut être ſenſible, le point i, dont l'orbite eſt à celle du point J' en raiſon de Si à SJ', eſt ſollicité vers γ par une force $= \frac{C}{CJ'^2} \times \frac{Si}{SJ} = \frac{C}{CJ'^2} \times \frac{S}{S+J}$; par conſéquent l'orbite décrite par le point γ autour de i eſt décrite en vertu d'une force égale à très-peu près à $\frac{C+J}{CJ'^2}$ ou $\frac{C+J}{\gamma i^2}$; ainſi dans le cas où la maſſe C eſt comparable à la maſſe J, la difficulté eſt la même que dans l'Addition précédente, & il ne paroît pas que la conſidération du ſatellite γ diminue beaucoup cette difficulté.

Autre Addition pour le L. Mémoire, §. I, pag. 309 & 310, à la fin des art. 9 & 10.

On peut, dans le cas où la force perturbatrice eſt très-comparable à la force centrale, conſidérer que cet inconvénient ne ſauroit avoir lieu que tandis que la Planete & la Comete décrivent une très-petite portion de leur orbite ; que cette portion differe par conſéquent très-peu d'une ligne droite ; qu'ainſi en nommant x la valeur connue qu'auroit le rayon vecteur, ſi l'orbite

étoit rectiligne, on peut supposer à ce rayon une valeur $= x + z$, z étant une quantité très-petite, dont on pourra négliger dans le calcul le quarré & les puissances plus hautes; ce qui pourra fournir des moyens de déterminer la portion cherchée de l'orbite par des méthodes assez exactes d'approximation.

Addition pour la page 311, *à la fin de l'art.* 11 *du §.* I *du L. Mémoire.*

Le cas que nous venons de discuter, où $n = 6$, c'est-à-dire, où la distance de la Lune à la Terre est supposée plus grande qu'elle n'est en effet, est à la vérité un cas purement métaphysique & qui n'existe point réellement; mais il peut être en soi assez intéressant de le discuter. D'ailleurs on peut remarquer en passant que le cas où 180 seroit $= n'^3$, seroit celui où le mois périodique de la Lune seroit d'une année, & où par conséquent la Lune pourroit nous éclairer constamment pendant tout le temps de l'absence du Soleil. Voyez nos *Mélanges de Philosophie*, Tome V, pag. 59. En effet, la force perturbatrice $\frac{Sn'\xi}{x^3}$ seroit en ce cas à la force centrale $\frac{T+L}{n'^2\xi^2}$, comme $\frac{S\xi^3}{(T+L)x^3}$ ou $\frac{1}{180}$, est à n'^3; or le rapport de ces forces centrales est celui des quarrés des temps périodiques. Donc si $180 = n'^3$, ces temps sont égaux. Donc, &c.

Addition pour le L. Mémoire, §. II, à la fin, page 324.

Nous avons remarqué, Tome II des *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, art. 232, que le calcul des perturbations réciproques de Jupiter & de Saturne dépendoit de l'intégration d'une quantité de cette forme $\frac{ds.s^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{(s-a)^2}{b^2}\right)}}$, laquelle dépend elle-même de la rectification des ſections coniques. Nous ajouterons ici que ſi $n=-3$, cette quantité ne dépend que de la rectification d'une ellipſe. En effet, nous avons fait voir (*Mém. de Berlin* 1746, art. XXIX, pag. 211) que l'intégration de $\frac{s^{-\frac{3}{2}}ds}{\sqrt{(A+Bs+Css)}}$ dépend uniquement de celle de $\frac{ds\sqrt{s}}{\sqrt{(A+Bs+Css)}}$; d'où il s'enſuit que l'intégration de $\frac{s^{-\frac{3}{2}}ds}{\sqrt{\left(1-\frac{(s-a)^2}{b^2}\right)}}$ dépend de celle de $\frac{ds\sqrt{s}}{\sqrt{\left(1-\frac{(s-a)^2}{b^2}\right)}}$, ou $\frac{ds\sqrt{s}}{\sqrt{(b^2-a^2+2as-ss)}}$. Or b étant ici $< a$, cette différentielle dépend de la rectification de l'ellipſe ſeule. Voyez *Mém. de Berlin* 1746, pag. 203, art. XV. De-là il eſt aiſé de conclure qu'on peut, par la ſeule rectification de l'ellipſe, déterminer les perturbations de Saturne & de Jupiter, en faiſant

abſtraction de l'excentricité de ces deux Planetes. Mais ſi on a égard à cette excentricité, alors n n'étant plus égal à -3, l'intégration dépend à-la-fois de la rectification de l'ellipſe & de celle de l'hyperbole; & par conſéquent il pourroit être moins commode d'employer cette méthode, que quand le problême ſe réduit à la ſeule rectification de l'ellipſe, qu'on peut trouver par différentes méthodes connues d'approximation.

Suivant ce que j'ai démontré dans les *Mém. de Berlin* 1746, p. 201, la différentielle $\frac{ds\sqrt{s}}{\sqrt{(bb-aa-ss+2as)}}$, dépend de la rectification d'une ellipſe, dont un des demi-axes eſt $\sqrt{(aa-bb)}$, & dont l'autre demi-axe, que j'appelle r, doit être tel que $2ar-rr=aa-bb$, ce qui donne $bb=(a-r)^2$ ou $b=a-r$, & $r=a-b$. Les abſciſſes x de cette ellipſe, priſes depuis le centre, doivent être telles que $xx=\frac{rs-rr}{q-1}$, ou $xx=\frac{rr-rs}{1-q}$, q étant le rapport du quarré $aa-bb$ de la moitié d'un des axes au quarré $(a-b)^2$ de la moitié de l'autre. Or on a (*Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſeconde Partie, p. 66) $s=a+b$ cof. Z, & par conſéquent $s-r=b$ cof. $Z+b$; donc xx ou $\frac{rs-rr}{q-1}=(a-b)(b+b$ cof. $Z)$ diviſé par $\frac{aa-bb}{(a-b)^2}-1$, c'eſt-à-dire, par $\frac{a+b}{a-b}-1$, ou $\frac{2b}{a-b}$; donc $xx=\frac{(a-b)^2}{2}\times(1+$ cof. $Z)$. D'où l'on

l'on voit 1°. que ſi Z eſt égal à 0, ou à la circonférence priſe un nombre entier de fois, on a $x = a - b$, 2°. que x eſt = 0 lorſque cof. $Z = -1$, c'eſt-à-dire, lorſque Z eſt égal à la moitié de la circonférence priſe un nombre impair de fois. De-là il eſt aiſé de conclure (Voyez *Recherches ſur le Syſtême du Monde*, ſeconde Partie, pag. 66) que la quantité que nous avons nommée A, dépend ici de la rectification d'une ellipſe *entiere*, dont les demi-axes ſont $\sqrt{(aa - bb)}$ & $a - b$; ou en général de la rectification d'une ellipſe *entiere*, dans laquelle le rapport du quarré des deux axes eſt celui de $a - b$ à $a + b$.

Addition pour le L. Mémoire, §. III, art. 9, page 328, & art. 11, page 329.

Dans ces valeurs de tang. ω & de k, on n'a pouſſé le calcul que juſqu'aux quantités de l'ordre de $\gamma\delta$, en ſe contentant d'indiquer qu'il peut être pouſſé plus loin, ce qui eſt très-facile par les formules connues. Il eſt en effet eſſentiel, ſur-tout dans la valeur de tang. ω, d'avoir égard de plus aux quantités de l'ordre de $\gamma^2\delta^2$, pour avoir l'équation ſéculaire du mouvement de l'apogée; comme il réſulte évidemment des articles qui ſuivent l'*art.* 9 dont il eſt queſtion ici. Or pour avoir ces quantités de l'ordre de $\gamma^2\delta^2$, il faut, au lieu de $\mathfrak{C}$ ſin. $(\gamma\zeta + \gamma\delta)$, écrire $\mathfrak{C}$ ſin. $\gamma\zeta + \mathfrak{C}\gamma\delta$ cof. $\gamma\zeta - \frac{\mathfrak{C}\gamma^2\delta^2}{2} \times$ ſin. $\gamma\zeta$, & au lieu de $\mathfrak{C}$ cof. $(\gamma\zeta + \gamma\delta)$,

il faut écrire ζ cof. $\gamma\zeta - \zeta\gamma\delta$ ſin. $\gamma\zeta - \frac{\zeta\gamma^2\delta^2}{2} \times$ cof. $\gamma\zeta$; de maniere que tang. ω ſe réduira à une quantité de cette forme $\frac{A + B\gamma\delta + C\gamma^2\delta^2}{A' + B'\gamma\delta + C'\gamma^2\delta^2}$, qu'il eſt aiſé de réduire à une autre de cette forme $A' + B''\gamma\delta + C''\gamma^2\delta^2$, $\gamma\delta$ étant regardé comme fort petit. On trouvera de même très-aiſément les quantités de l'ordre de $\gamma^2\delta^2$ qui entrent dans la valeur de k. Mais ces quantités ſeront moins néceſſaires à conſidérer, par la raiſon que l'équation ſéculaire de l'excentricité k eſt ſuffiſamment déterminée par les quantités de l'ordre de $\gamma\delta$; au lieu que les quantités de l'ordre de $\gamma^2\delta^2$ doivent entrer néceſſairement dans l'équation ſéculaire du mouvement de l'apogée.

Connoiſſant la valeur de tang. ω, que je ſuppoſe $E + F\gamma\delta + G\gamma^2\delta^2$, il eſt encore très-facile d'avoir la valeur de l'angle ω. Car ſoit H l'angle dont la tangente eſt E, on aura $\omega = H + \eta$, η étant un fort petit angle; & en ſuppoſant $F\gamma\delta + G\gamma^2\delta^2 = \mu$, on trouvera aiſément que ſin. $\eta = \frac{\mu}{\sqrt{(1+EE)}} \times \frac{1}{\sqrt{(1+EE+2E\mu+\mu\mu)}}$; on réduira cette quantité en ſerie, en négligeant les quantités d'un ordre ſupérieur à μ^2, & on aura la valeur de ſin. $\eta = L\mu + M\mu^2$; or comme η (*hyp.*) eſt fort petit, & que la différence de l'angle η & de ſon ſinus ſeroit de l'ordre de η^3, on peut mettre au lieu de η cette valeur $L\mu + M\mu^2$; de

ſorte que l'angle cherché ω ſera $= H + L\mu + M\mu^2 = H + L.F\gamma\delta + L.G\gamma^2\delta^2 + M.F^2\gamma^2\delta^2$.

Il eſt encore bon de remarquer, que comme les quantités α & $\mathfrak{C}$, quoique très-petites, ſont ſuppoſées du même ordre, & que tous les termes ſont ici affectés de puiſſances de $\frac{\mathfrak{C}}{\alpha + \mathfrak{C}\ \text{cof.}\ \gamma\zeta}$, il n'y a dans les valeurs de ω & de k, de quantités réellement très-petites que $\gamma\delta$ & $\gamma^2\delta^2$.

Addition pour le L. Mémoire, §. III, art. 12, page 329 & 330.

Il eſt aiſé de voir que les deux termes α cof. $N\zeta + \mathfrak{C}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$ qu'on ſuppoſe ſe trouver dans l'expreſſion du rayon vecteur, produiront une équation du centre $= \frac{2\alpha\ \text{ſin.}\ N\zeta}{N} + \frac{2\mathfrak{C}\ \text{ſin.}\ (N\zeta + \gamma\zeta)}{N+\gamma}$. Soit maintenant propoſée une quantité α' ſin. $N\zeta + \mathfrak{C}'$ ſin. $(N\zeta + \gamma\zeta)$ à réduire à k' ſin. $(N\zeta + \omega')$; on trouvera aiſément par une méthode ſemblable à celle de l'*art.* 2, p. 325, tang. $\omega' = \frac{\mathfrak{C}'\ \text{ſin.}\ \delta'}{\alpha' + \mathfrak{C}'\ \text{cof.}\ \delta'}$, & $k' = \sqrt{(\alpha'^2 + \mathfrak{C}'^2 + 2\alpha'\mathfrak{C}'\ \text{cof.}\ \delta')}$; on mettra dans ces quantités au lieu de α', $\mathfrak{C}'$, δ', leurs valeurs $\frac{2\alpha}{N}$, $\frac{2\mathfrak{C}}{N+\gamma}$ & $\gamma\zeta + \gamma\delta$, & on trouvera aiſément que l'équation ſéculaire de k' ſera égale à $\frac{2\mathfrak{C}\alpha\gamma\delta\ \text{ſin.}\ \gamma\zeta}{N(N+\gamma)}$, diviſé par $\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{N^2} + \frac{\mathfrak{C}^2}{(N+\gamma)^2} + \frac{2\alpha\mathfrak{C}\ \text{cof.}\ \gamma\zeta}{N(N+\gamma)}\right)}$; or on a vu (*art.* 9, p. 328) que l'équation

séculaire de l'excentricité est $\frac{6\alpha\gamma\delta \sin.\gamma\zeta}{\sqrt{(\alpha^2+6^2+2\alpha 6 \cos.\gamma\zeta)}}$; d'où il est clair que l'inégalité séculaire de l'équation du centre est proportionnelle à celle de l'excentricité, & à peu près égale au double de cette excentricité, si N est presque $= 1$ & γ fort petit, comme il arrive dans la Théorie de Jupiter & de Saturne. Mais si N, par exemple, étoit fort différent de l'unité, alors on ne pourroit pas supposer que l'équation séculaire de k' fût à peu près le double de celle de k.

Addition pour le L. Mémoire, §. IV, art. 6; page 338.

La remarque que nous faisons ici sur l'exactitude de la solution que M. Euler a donnée après la nôtre, pourroit faire croire aussi que la solution de M. Simpson est exacte, parce que s'il a pris la force centrifuge égale à la valeur qu'on lui trouve dans l'hypothèse de la courbe rigoureuse, il a pris aussi le ddx égal à la moitié de la valeur qu'on doit lui trouver dans la différentiation prise à l'ordinaire. Mais cette prétendue justification de la solution de M. Simpson seroit sans fondement; car il est aisé de voir, en examinant cette solution, qu'il a pris le ddx suivant les régles ordinaires de la différentiation, & que l'erreur qu'il a commise, est d'avoir pris pour ddx la différence de PH & de DO (Fig. 41), ou ce qui est la même chose, de DO & de BC, & non pas, comme il le devoit, la différence de PH

& de EH, c'eſt-à-dire, de PH & de BC, à cauſe de $BC = EH$.

J'ajouterai encore ici deux obſervations; la premiere, c'eſt que d'habiles Géometres, comme je l'ai reconnu depuis la compoſition de cet écrit, ont remarqué l'erreur de M. Simpſon ſur le ddx; mais ſi en corrigeant cette erreur on laiſſe en même-temps ſubſiſter l'expreſſion donnée par M. Simpſon ſur la force centrifuge, il en viendra un réſultat fautif, & différent du réſultat vrai, que donne, par une compenſation de mépriſes, la ſolution doublement erronée de M. Simpſon.

Ma ſeconde obſervation eſt qu'en employant une méthode plus rigoureuſe & plus exactement analytique que celle de M. Simpſon, on peut trouver par un calcul aſſez facile le rapport des deux forces dont il s'agit. (Voyez Tome V de nos *Opuſcules*, p. 283, art. 57). C'eſt ce que M. de la Grange a pris la peine de faire, dans une Lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire, en date du 20 Novembre 1769; & le réſultat de l'analyſe rigoureuſe qu'il donne dans cette Lettre du problême dont il s'agit ici, eſt qu'en effet le rapport des deux forces eſt tel que l'avance M. Simpſon, mais non pas tel qu'il le démontre. Cette analyſe de M. de la Grange acheveroit de lever tous les doutes ſur ce ſujet, s'il pouvoit en reſter encore. C'eſt pourquoi nous nous abſtiendrons d'en dire davantage & ſur la ſolution de M. Simpſon, & ſur les autres ſolutions peu exactes que d'autres Géometres ont donnée du même problême.

Addition pour le LI. Mémoire, §. I, art. 16, page 370.

Dans l'équation $g = A(f + b + c)$ nous avons donné le même coefficient A aux quantités ou puiſſances f, b, c, parce qu'il faut que ces quantités puiſſent être miſes indifféremment l'une à la place de l'autre dans l'équation, de maniere qu'il en réſulte toujours la même valeur de g; en conſéquence il n'y a point de raiſon pour que l'une ait un coefficient différent de l'autre dans cette même équation.

Au reſte, ſi on veut enviſager la choſe d'une maniere encore plus générale, on peut conſidérer que $g = A(f + b)$ étant la puiſſance qui réſulte de f & de b, celle qui réſultera de f, b, c, ou de g & c, ſera $A(g + c)$, ou en général, ſi l'on veut, $B(g + c) = BAf + BAb + Bc$, qui doit être $= f$ lorſque $c = -b$; d'où l'on tire $BA = 1$, & $BA - B = 0$, & par conſéquent $A = 1$, & $B = 1$.

Dans l'*art.* 17 qui ſuit (même page 370), ſi on ſuppoſe de même pour plus de généralité $g = A(f + b)$ & $f = Bg - Bb$, on aura $\frac{g - Ab}{A} = Bg - Bb$, d'où l'on tire $AB = 1$ & $-A = -AB$. Donc $A = 1$, & $B = 1$.

On peut remarquer encore que f & b, ou ce qui eſt la même choſe, f & n étant donnés, g eſt donné & déterminé; d'où il s'enſuit que dans l'équation $g =$

$f\phi n$, on ne doit pas ſuppoſer que la fonction φn change de forme ſuivant les différentes valeurs de n; autrement la valeur de g ſeroit indéterminée. En effet, prenons pour φn, ou, ce qui revient au même, pour $\Delta(1+n)$, pag. 369, une quantité quelconque de la forme qu'on voudra, comme $A + Bn^2 + Cn^3$, &c. ou telle autre à volonté; ſoit ſuppoſé $n =$ à un nombre donné a; & dans l'équation de condition $\frac{\Delta(1+n)}{n} = \Delta\left(\frac{1+n}{n}\right)$, ou mettons a pour n; il eſt clair qu'en faiſant varier à volonté les coefficiens B, C, par exemple, on déterminera le coefficient A à être tel qu'il ſatisfaſſe à cette équation; d'où il eſt viſible que pour une valeur de $n = a$, il y a une infinité, & même une infinité d'infinité de formes à donner à φn pour ſatisfaire à l'équation $\frac{\Delta(1+n)}{n} = \Delta\left(\frac{1+n}{n}\right)$; & comme cette équation de condition eſt la ſeule de laquelle dépende la valeur, déterminée & unique, de φn ou de g, il s'enſuit que φn ne peut être ſuppoſée une fonction variable pour chaque valeur de n, mais que φn eſt une fonction toujours de la même forme, quelle que ſoit la valeur de n.

Addition pour le LI. Mémoire, §. III, art. 6, page 377.

On peut encore prouver directement de la maniere ſuivante que ſi $x = Et^p$, (p étant poſitif, comme il

eſt néceſſaire) l'expoſant n de l'équation $du = Au^n dt$ ne ſauroit être à-la-fois > 1 & < 2. En effet, l'équation $x = Et^p$, donne $\frac{dx}{dt}$ ou $u = At^{p-1}$, & $t = Bu^{\frac{1}{p-1}}$; & de plus on a encore $\frac{ddx}{dt^2} = Ct^{p-2}$ ou $du = Cu^{\frac{p-2}{p-1}}$. Or il eſt clair 1°. que ſi p eſt > 1, on aura $\frac{p-2}{p-1} < 1$, & par conſéquent $n < 1$. 2°. Que ſi p eſt < 1, on aura $\frac{p-2}{p-1}$ ou $\frac{2-p}{1-p} > 2$. Donc n ne ſauroit être à-la-fois > 1 & < 2.

De-là il s'enſuit que ſi n eſt > 1 & < 2 dans l'équation $du = Au^n dt$ ou $du = Au^{n-1} dx$, l'équation entre x & t qui en réſultera ne ſauroit être ſuppoſée de la forme $x = Et^p$, dans laquelle il n'entre que deux termes, p étant un nombre entier poſitif, comme il le doit toujours être.

Addition pour le LI. Mémoire, §. IV, art. 23, page 390.

Cette maniere de conſidérer les particules du fluide comme ſe mouvant, non-ſeulement dans des tuyaux différens & très-petits, (ainſi que je l'ai ſuppoſé le premier, Tome I *Opuſc.* p. 157) mais ce qui n'eſt pas moins eſſentiel, & ce que perſonne n'a fait encore, dans des tuyaux infiniment petits qui changent d'un inſtant à l'autre;

peut

peut donner, comme l'on voit, un réſultat très-différent de celui qu'on auroit en ſuppoſant que ces tuyaux demeurent les mêmes pendant deux inſtans conſécutifs. Il pourroit, par exemple, très-bien ſe faire, en imaginant les tuyaux variables dans deux inſtans conſécutifs, que l'équation $uu = 2ph$, qu'on trouve lorſque l'ouverture eſt fort petite, ne fût pas exactement vraie dans tous les cas, & dans d'autres vaſes que des vaſes cylindriques ; par la raiſon que cette équation $uu = 2ph$ dépend de la nullité, au moins ſenſible, du terme $\int \frac{dx\delta y}{y^2}$, & que cette nullité, ou *preſque-nullité*, dépend de la valeur de $\int dx\delta y$, qui pourroit être nulle ou comme nulle dans un vaiſſeau cylindrique, & peut-être ne l'être pas dans un vaiſſeau non cylindrique. C'eſt ce que nous pourrons développer ailleurs plus au long, s'il nous reſte aſſez de ſanté pour pouvoir encore nous livrer aux ſpéculations Mathématiques.

Addition pour le LI. Mémoire, §. VI, art. 5, page 396.

Il faut bien remarquer que quoiqu'on puiſſe ſuppoſer ſéparément $T \times S = Ac^{fs} \times (\alpha c^{cs} + \alpha' c^{c's})$, & $T \times S = A'c^{f's} \times (\alpha'' c^{c''s} + \alpha''' c^{c'''s})$, on ne peut ſuppoſer $T \times S$ égal à la ſomme de ces produits, parce qu'alors cette ſomme totale ne ſeroit pas égale au produit d'une fonction T de s par une fonction S de s, comme la condition du problême l'exige. En effet, ſoit, par exemple,

ſuppoſé plus bas, *art.* 8, page 396, $\varphi(t+as) = aAc^{f(t+as)} + \gamma A'c^{f'(t+as)}$, & $\Psi(t+bs) = a'Ac^{f(t+bs)} + \gamma'A'c^{f'(t+bs)}$, on aura $\varphi(t+as) + \Psi(t+bs) = (aA+a'A)c^{ft} \times (c^{fas}+c^{fbs}) + (\gamma A'+\gamma'A')c^{f't} \times (c^{f'as}+c^{f'bs})$ = à la ſomme des deux produits $T \times S + T' \times S'$, & non pas à un ſeul produit de la forme $T \times S$.

Addition pour le LI. Mémoire, §. VI, *art.* 14; *page* 399.

Pour faire ſentir que la ſolution peut n'être pas poſſible dans tous les cas, remarquons que pour ſatisfaire, par exemple, à l'équation $\varphi(t+as) + \Psi(t+bs) = T \times S$, on a $\varphi(t+as) = Mc^{f(t+as)}$ & $\Psi(t+bs) = Nc^{f(t+bs)}$. Donc ſi on fait $s = t$, on aura $\varphi[(1+a)t] + \Psi[(1+b)t] = Mc^{ft(1+a)} + Nc^{ft(1+b)} = c^{ft} \times (Mc^{fat} + Nc^{fbt})$. Si donc en faiſant s égal à t, on veut que $\varphi(kt) + \Psi(k't) = \Delta t \times \Gamma t$, il faudra que l'on puiſſe ſuppoſer non-ſeulement $f + af = k$, & $f + bf = k'$, ce qui eſt toujours poſſible, mais encore $\varphi(kt) = M\varphi(kt)$, $\Psi(k't) = N\varphi(k't)$, $\Delta t = \varphi\left(\frac{kt}{1+a}\right)$, $\Gamma t = M\varphi\left(\frac{kat}{1+a}\right) + N\varphi\left(\frac{k'bt}{1+b}\right)$ & $\frac{k}{1+a} = \frac{k'}{1+b}$. Si donc on propoſe, par exemple, cette équation de condition $M\varphi(kt) + N\varphi(k't) = G\varphi(mt) \times H.\Gamma t$, ou ſimplement $= \varphi(mt) \times L.\Gamma t$, il faudra, pour l'application de la ſolution préſente, que $L.\Gamma t$ ſoit égal à $M\varphi mat + N\varphi mbt$, a & b étant tels

que $1+a=\frac{k}{m}$, & $1+b=\frac{k'}{m}$, & ainſi du reſte. Cette remarque ſuffit pour mettre le Lecteur à portée de déterminer, dans les autres problêmes ſemblables, les cas où la ſolution ſera poſſible, & de donner à la méthode que nous propoſons ici, toute l'étendue dont elle eſt ſuſceptible, lorſqu'on appliquera la ſolution générale au cas de $s=t$. Nous ne prétendons pas au reſte que la ſuppoſition de $s=t$, dans cette ſolution générale, doive donner ſans reſtriction la ſolution de tous les problêmes où il s'agira de déterminer une fonction inconnue d'une ſeule inconnue t, par quelque propriété de cette fonction; mais nous ne nous étendrons pas davantage ici ſur ce ſujet.

Fin du Sixiéme Volume.

Fautes à corriger dans ce Sixiéme Volume.

PAGE 112, *art.* 24, 26, 27 & 28, *liſez par-tout* $K^{I}N^{II}$, *au lieu de* KN^{II}, & $K^{II}O^{I}$, *au lieu de* KO^{I}.

Page 187, *ligne* 2, *au lieu de* doubler, *liſez* quadrupler, & *voyez pour la ſuite de cette correction, l'Appendice ci-deſſus, pag.* 424 & 425.

Page 335, *ligne* 16, *au lieu de* échappée, *liſez* échappé.

Fautes à corriger dans le Cinquiéme Volume.

PAGE 193, *ligne* 4, *au lieu de* $\zeta\sqrt{\ }-1$, *liſez* ζ.

Page 142, *art.* 14 & *ſuiv.* il s'eſt gliſſé dans ces articles quelques légeres mépriſes de calcul, qui ſont corrigées dans le Tome IV des *Mémoires de Turin*, pag. 151.

Page 277, *ligne derniere*, & *page* 278, *ligne* 4 *à compter d'en bas, au lieu de* $\frac{Gff}{2}$, *liſez* Gff.

Page 298, *ligne* 5, *au lieu de* la tangente de l'inclinaiſon, *liſez* l'inclinaiſon.

Page 471, *ligne* 9, *effacez cette phraſe*, ni même égal à une quantité conſtante indépendante de la denſité des milieux, & *voyez de plus quelques autres corrections, indiquées dans ce Sixiéme Volume, page* 281.

Page 496, *ligne* 11, *après le terme* $+\zeta d\pi^{2}$, *ajoutez le terme* $+\varsigma dtd\pi$.

Errata pour la ſeconde Edition, donnée en 1770, *du* Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides.

Page 135, *ligne* 9, *à compter d'en bas, au lieu de* $-sdq$, *liſez* $+sdq$.

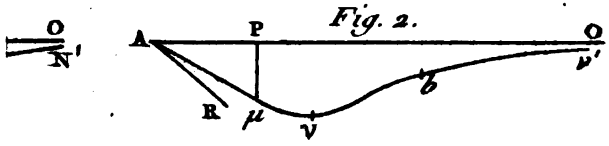

Fig. 2.

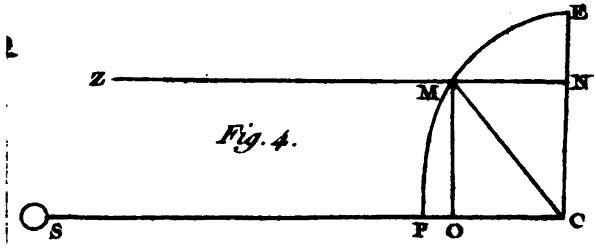

Fig. 4.

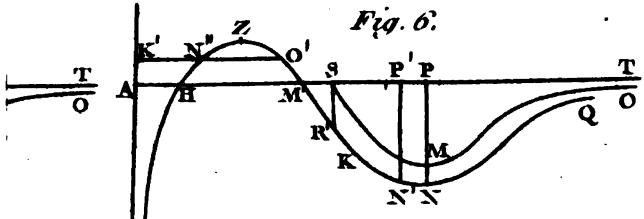

Fig. 6.

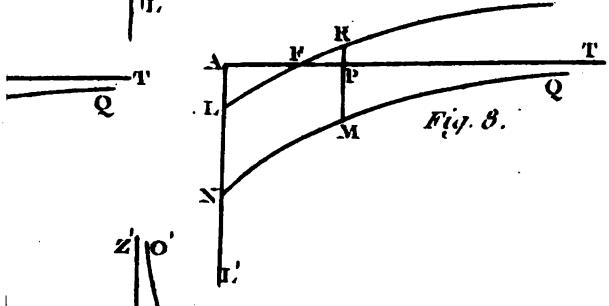

Fig. 8.

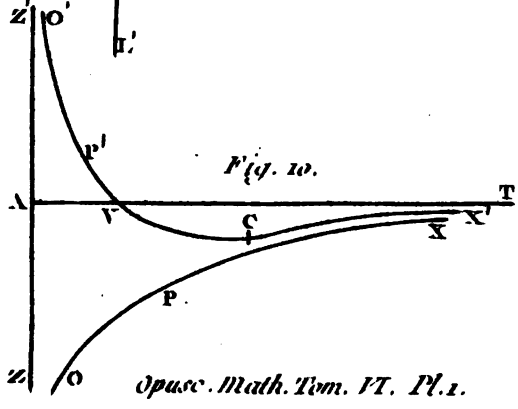

Fig. 10.

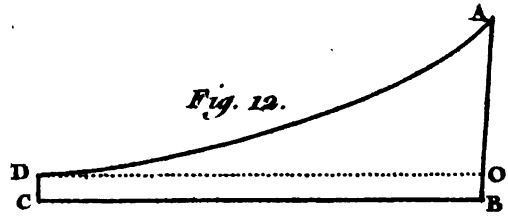

Fig. 12.

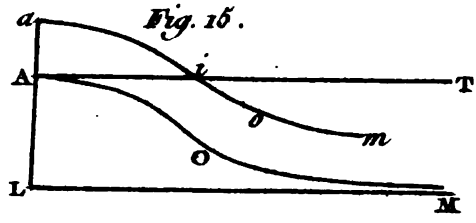

Fig. 15.

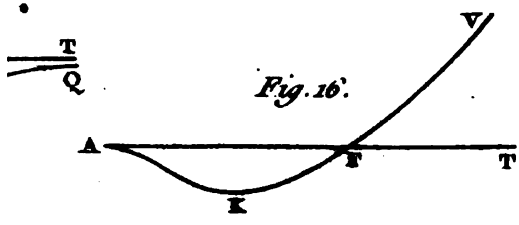

Fig. 16.

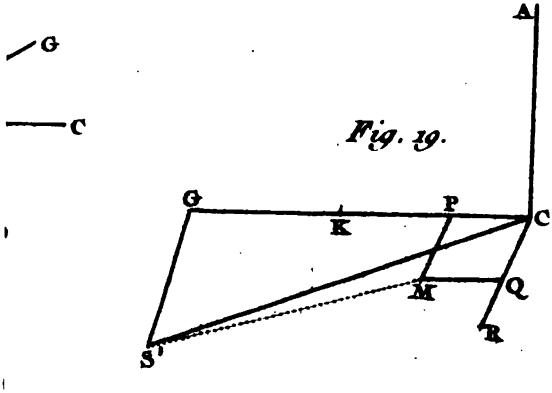

Fig. 19.

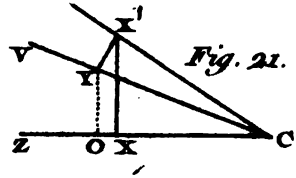

Fig. 21.

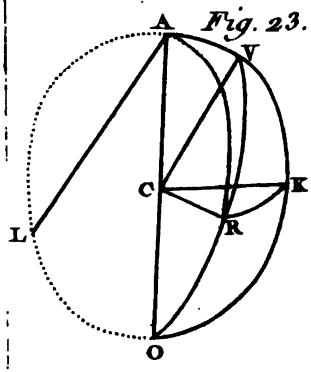

Fig. 23.

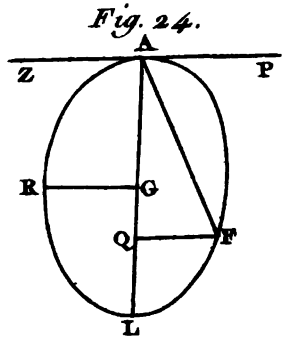

Fig. 24.

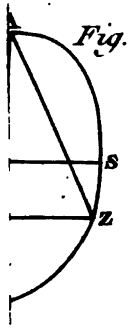

Fig. 26.

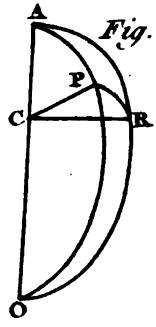

Fig. 27.

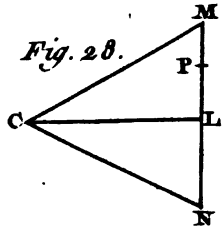

Fig. 28.

Fig. 30.

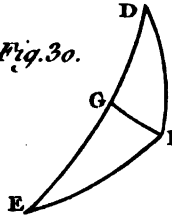

Fig. 31.

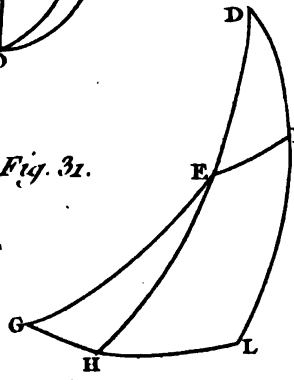

Fig. 32.

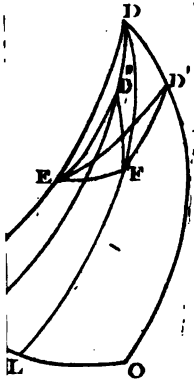

Fig. 34.

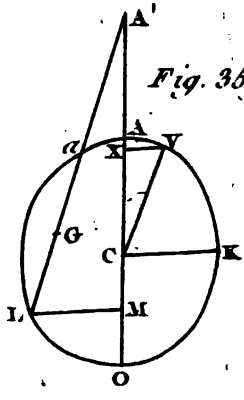

Fig. 35.

Opusc. Math. Tom. VI. Pl. 3.

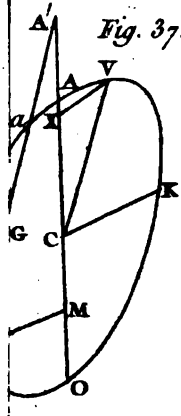

Fig. 37.

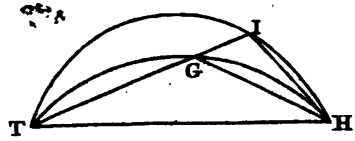

Fig. 38.

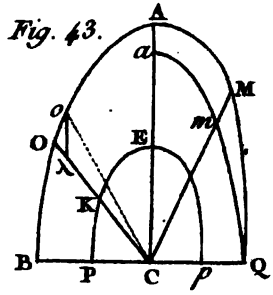

Fig. 43.

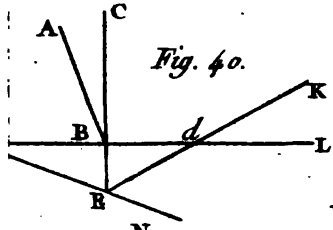

Fig. 40.

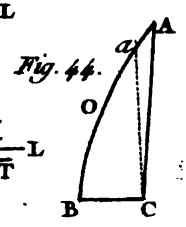

Fig. 44.

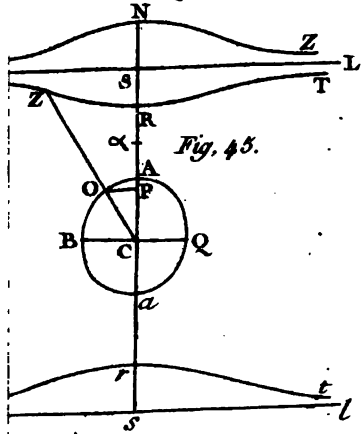

Fig. 45.

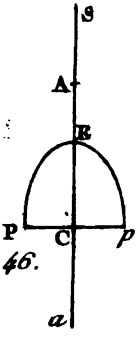

Fig. 46.

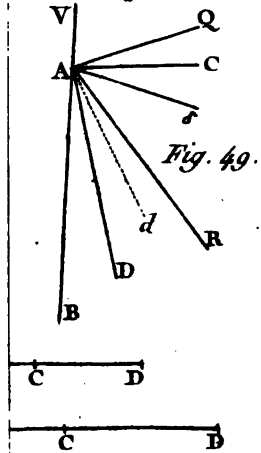

Fig. 49.

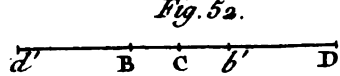

Fig. 52.

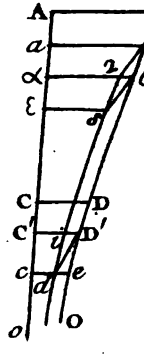

Fig. 53.

Opusc. Math. Tom. VI. Pl. 4.

et Derniere